

John Adams Library.



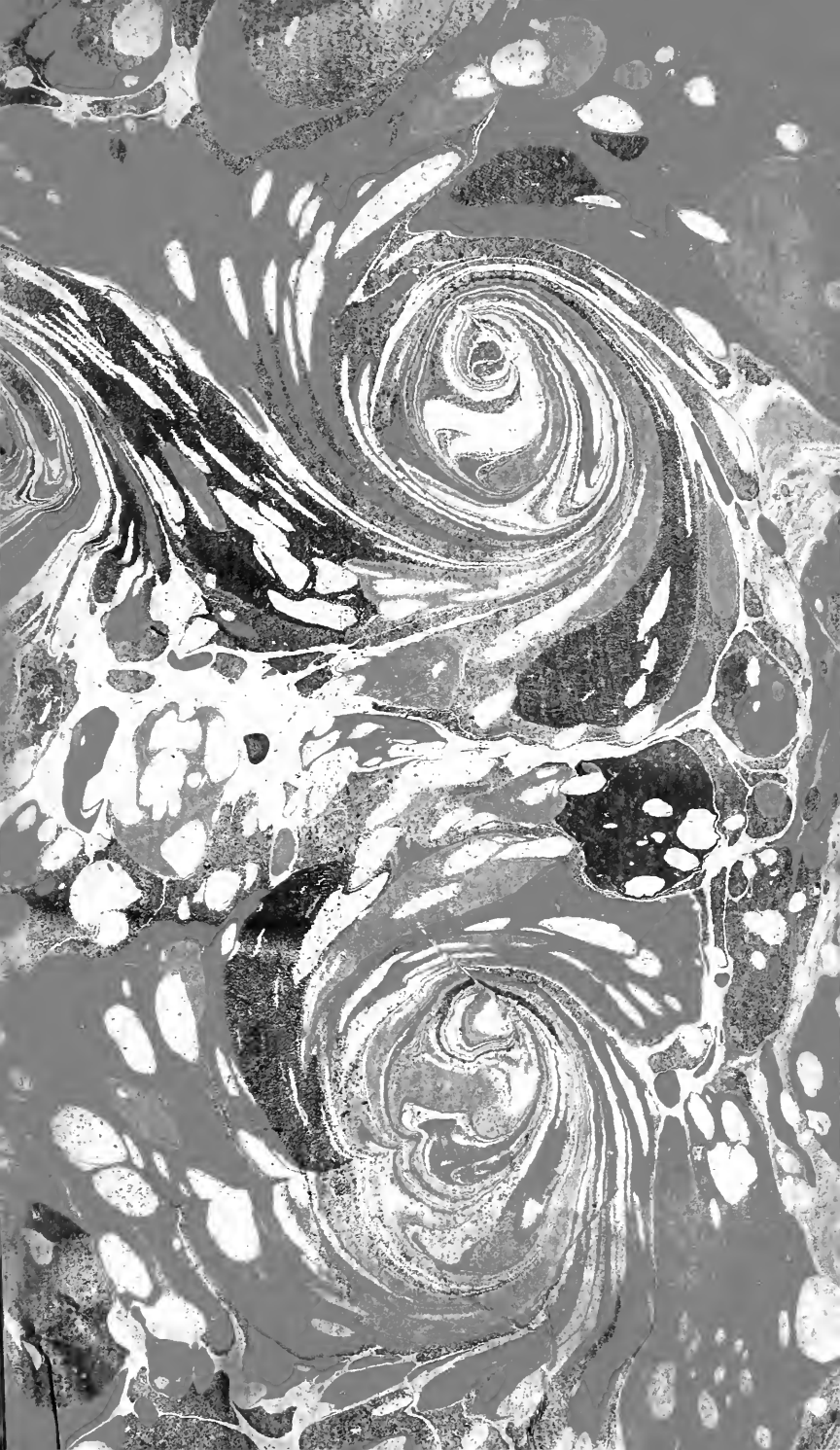
IN THE CUSTODY OF THE
BOSTON PUBLIC LIBRARY.



SHELF N^o.

★ ADAMS ★

244.17



4-6





LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

DU R. P. DÉCHALLES,

ET

DE M. OZANAM,

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Démontrés d'une manière nouvelle & facile ;
& augmentés d'un grand nombre de nouvelles
Propositions & de nouveaux Usages ; & d'un
Traité complet des Proportions arithmétiques
& des Proportions géométriques.

Par M. AUDIERNE.

NOUVELLE EDITION, revue, corrigée & considé-
rablement augmentée par l'Auteur.



A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire
du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

✓

★
★ ADAMS

244.17

AVIS

SUR CETTE NOUVELLE EDITION.

CES Elémens furent imprimés pour la première fois in-12 en 1746. On en fit une 2^{me} édition, avec quelques changemens, en 1753; & c'est d'après cette seconde édition qu'on les a toujours réimprimés. Mais l'Auteur, profitant de toute l'expérience qu'il a acquise dans l'art d'enseigner, par un exercice continuél de plus de quarante années, vient de revoir tout son ouvrage avec la plus grande attention. Il en a simplifié toutes les démonstrations qui étoient susceptibles de l'être, & corrigé toutes celles auxquelles on auroit pu trouver quelque difficulté; de manière qu'à présent tout y est à la portée de toutes les personnes qui le liront avec un peu d'attention.

Aux propositions supprimées dans le sixième Livre, comme étant inutiles, il en a substitué de nouvelles qui rendent plus complète la théorie du cercle; & d'autres qui, quoique élémentaires, ne se trouvent qu'éparses dans différens Traités particuliers. Par ce moyen, il ne reste dans tous les élémens de Géométrie que l'on ne cesse de publier de-

puis plus de 50 ans, aucune proposition qui ne se trouve dans cette nouvelle édition.

Enfin, l'Auteur y a ajouté son Traité des proportions arithmétiques, qui n'avoit point encore été imprimé; & quelques usages qui pourront devenir d'une pratique journaliere, & ne se trouvent nulle part.

Ce qui nous reste à dire sur cette nouvelle édition, c'est qu'il n'y a personne qui ne puisse entendre facilement & sans aucun secours étranger, tout ce qui y est démontré; & lorsqu'on l'aura bien compris, on pourra se flatter avec justice, de bien sçavoir la Géométrie.

A l'égard du septieme Livre, du huitieme, du neuvieme & du dixieme, que l'on ne trouve point ici, il y a très-longtemps qu'on les a supprimés; sçavoir le septieme, parce qu'il n'est qu'une répétition inutile du cinquieme, qui est précisément celui qu'Euclide a le plus mal traité: le huitieme & le neuvieme, parce qu'ils sont absolument étrangers à la Géométrie, & ne contiennent que quelques propriétés des nombres qui sont fort indifférentes: & le dixieme, parce qu'il est très-long, très-abstrait, & de la plus parfaite inutilité.





P R É F A C E.

LE Nil qui chaque année étend ses eaux sur toute l'Egypte , enleve les bornes des terres de cette contrée ; de maniere que les propriétaires sont souvent obligés , lorsque ce fleuve est rentré dans son lit , de rechercher le terrain qu'ils possédoient avant l'inondation. Cette nécessité fit inventer aux premiers Egyptiens , les moyens de mesurer l'étendue que peut avoir un certain espace , & ils donnerent à cet art le nom de *Géométrie* , qui en notre langue signifie *Mesure de la Terre*. Mais cette science , qui dans son origine n'avoit eu que cet objet assez simple , sortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naissance ; & devint , pour me servir de l'expression de Platon , l'une des ailes avec lesquelles l'homme s'éleva jusqu'à ces globes immenses qui roulent sur sa tête. Alors , les machines furent inventées ; les édifices les plus hardis furent élevés ; les périodes

des astres furent déterminées; les courses, les distances, les grandeurs des planetes, furent mesurées. Enfin, on construisit les vaisseaux, & la mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.

On a donné plusieurs Traités d'une science dont on a retiré de si grands avantages, & qui en procure tous les jours de nouveaux. Mais, la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit souhaiter. Les uns, trop secs & trop obscurs, sont la cause que l'on se dégoûte de la Géométrie avant que de la connoître : les autres, au contraire, trop dénués du style qui est propre & particulier à cette science, n'ont ni l'ordre, ni le génie qui lui convient. Ainsi, loin de donner à l'esprit l'étendue & la justesse, qui sont les principaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude, ils font penser que la Géométrie est aussi problématique que la Physique. Et comme ces deux sciences ne sont pas également séduisantes, on va quelquefois jusqu'à accuser la premiere de manquer de sens commun*;

* Voyez le n^o II.

elle, qui est le chef-d'œuvre du bon sens.

L'abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles, n'a point le premier de ces défauts. Ce savant Mathématicien, en y simplifiant les démonstrations, met la Géométrie à la portée des personnes qui veulent s'instruire de cette science; & en joignant des usages à plusieurs propositions, il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes propositions pourroit causer. Mais, comme il étoit trop Géometre pour prévoir que l'on recevroit un jour des preuves, ou simplement physiques, ou totalement arithmétiques, pour des démonstrations géométriques, il n'a pas toujours été attentif à ne démontrer qu'en rigueur: & par-là, il n'est d'aucun secours contre ces démonstrations vicieuses qui sont devenues si communes, qu'il est bien rare que ceux qui n'étudient la Géométrie que dans les auteurs modernes, deviennent jamais Géometres.

C'est le désir de remédier à ce dernier défaut qui m'a fait entreprendre de démontrer de nouveau ces Elémens; sans m'assu-

jettir à suivre , ni le P. Dechalles , ni M. Ozanam , ni aucun autre Auteur. Je me suis seulement proposé deux objets dans mon travail , dont le premier a été de ne donner que des démonstrations qui eussent toute la rigueur de celles des Anciens ; & le second , de me mettre à la portée de toutes les personnes qui , par goût ou par état , veulent s'appliquer à ce genre d'étude. Si quelques personnes trouvent que j'aie employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs , pour démontrer quelques propositions , je supplie ces personnes de ne mesurer mes démonstrations que par la durée du temps qu'elles emploieront à les comprendre ; de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur ; & que si elles m'entendent sans peine , & si je n'ai laissé aucun voile sur les vérités que je voulois découvrir , j'ai fait ce que je devois faire.

A l'égard d'Euclide , de qui ces Elémens portent le nom , il étoit de la ville de Mégare , vivoit sous le premier des Ptolomées , environ 400 ans avant J. C. ; & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui que ceux qu'il a formés.



NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

LES Mathématiciens nomment *Théorèmes*, les propositions qui ne font qu'exposer une vérité : *Problèmes*, celles qui proposent quelque chose à faire : *Corollaires*, celles qui sont des conséquences d'autres propositions : & enfin *Scholies*, celles qui ne sont que des remarques.

Ils nomment *hypothèse*, les conditions auxquelles ils disent qu'une chose doit être : & *conséquence*, ce qui suit de l'hypothèse, & qu'il faut démontrer.

Par exemple, dans cette proposition : *si un triangle est équilatéral, ses trois angles sont égaux* ; cette partie, *si un triangle est équilatéral*, est l'*hypothèse* ; & celle-ci, *ses trois angles sont égaux*, est la *conséquence*, qu'il faut démontrer.

C'est l'usage de terminer toujours la démonstration d'une proposition,

x NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

par la répétition de l'hypothèse & de la conséquence. Mais, pour abrégé, on désigne l'un & l'autre par ces quatre lettres, C. Q. F. D., s'il s'agit d'un théorème; & par ces quatre lettres, C. Q. F. F., s'il est question d'un problème. Les quatre premières signifient, *ce qu'il falloit démontrer*; & les quatre autres, *ce qu'il falloit faire*.

C'est aussi par le même motif de brièveté que nous nous sommes servis de quelques signes, dont voici l'explication.

(n) Signifie, *par le numéro qui est chiffré à la marge*.

[C] Signifie, *par la construction*.

[D] Signifie, *par ce qui vient d'être démontré*.

[H] Signifie, *par l'hypothèse*.

[S] Signifie, *par la supposition*.

L'astérisque * avertit que la figure est indiquée à la marge.



A P P R O B A T I O N.

J'AI lu, par ordre de M^{gr} le Garde des Sceaux ,
Les Elémens d'Euclide du P. Déchalles , & de
M. Ozanam , de l'Académie royale des Sciences.

Cette nouvelle édition, corrigée , & augmentée des Proportions arithmétiques, des Proportions géométriques, &c. nous a paru remplir les vues de tous ceux qui veulent s'adonner à l'étude de la Géométrie , & qui désirent de cette science un Traité complet, court & facile. A Paris, ce
5 Août 1775. MONTUCLA.

P R I V I L E G E D U R O I.

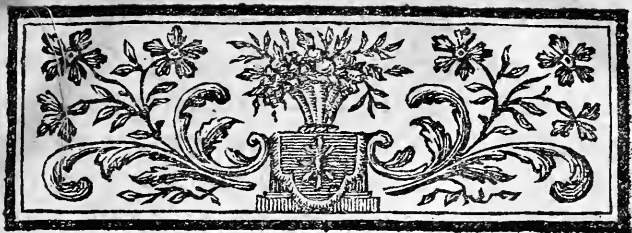
LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos Amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le sieur J O M B E R T, fils aîné, notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public, *Les Œuvres de Mathématiques de M. Ozanam, & de M. Clermont*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants,

dont un tiers à Nous , un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris , & l'autre tiers audit Exposant , ou à celui qui aura droit de lui , & de tous dépens , dommages & intérêts. A la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris , dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression dudit ouvrage sera faite dans notre Royaume , & non ailleurs , en bon papier & beaux caractères , conformément aux Réglements de la Librairie , & notamment à celui du dix Avril 1725 , à peine de déchéance du présent Privilege ; qu'avant de les exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression desdits Ouvrages , sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée , ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France le sieur HUE DE MIROMENIL ; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique , un dans celle de notre Château du Louvre , & un dans celle de notre très-cher féal Chevalier , Chancelier de France le sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit sieur HUE DE MIROMENIL ; le tout à peine de nullité des Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant cause , pleinement & paisiblement , sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes , qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage , soit tenue pour dûement signifiée , & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers - Secrétaires , foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis , de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires ; sans demander autre permission , & nonobstant clameur de hato , charte normandée & lettres à ce contraires : car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le trentième jour du mois d'Août, l'an de grace mil sept cent soixante-quinze , & de notre regne le deuxième. Par le Roi en son Conseil.

Signé , LEBEGUE.

Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n^o 167, fol. 6, conformément au Règlement de 1723. A Paris, ce 4 Septembre 1775.

Signé, SAILLANT, Syndic.



LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

***EUCLIDE** commence ce Livre par définir les termes les plus ordinaires de la Géométrie, & par poser les principes sur lesquels il doit fonder toutes ses démonstrations. Il considère ensuite les triangles ; détermine les conditions auxquelles on doit conclure l'égalité de leurs angles , de leurs côtés & de leurs surfaces ; & enseigne la manière de se servir de ces figures , pour résoudre les problèmes les plus simples de la Géométrie. Il passe aux lignes parallèles ; examine à quelles marques on peut connoître si des lignes le sont ; considère les propriétés de ces lignes ; en déduit une des*

plus considérables des triangles ; & naturellement conduit aux parallélogrammes , qui sont des figures formées par ces mêmes lignes , il en expose aussi plusieurs propriétés ; démontre quelques-uns des cas auxquels ils sont égaux , & donne des regles pour transformer en parallélogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuse proposition du quarré de l'hypoténuse , l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie ; & qui causa , dit-on , tant de plaisir à Pythagore , lorsqu'il l'eût trouvée , qu'il offrit aux Muses un sacrifice de cent bœufs , pour les remercier de la faveur qu'elles lui avoient faite.

D É F I N I T I O N S.

N^o 1. **L**A Géométrie est une science qui considère l'étendue.

2. Ce qui est étendu peut ne l'être qu'en un sens , c'est-à-dire n'avoir que de la *longueur*. Il peut l'être en deux sens , c'est-à-dire avoir en même temps de la *longueur* & de la *largeur* †. Enfin il peut l'être en trois sens , c'est-à-dire avoir en

† La largeur se nomme aussi la *hauteur*.

même temps de la *longueur*, de la *largeur* & de l'épaisseur †.

Par exemple, la distance d'un lieu à un autre n'est que *longue* : ce que nous voyons du plancher d'une chambre est en même temps *long* & *large* : un mur est en même temps *long*, *large* & *épais*.

Ainsi il y a trois genres d'étendues.

3. La *longueur*, la *largeur* & l'épaisseur se nomment chacune *Dimension*.

On entend ici par le terme de *Dimension*, la distance de l'un des côtés d'une étendue au côté opposé. Ainsi, la grandeur d'une étendue dépend de la grandeur de chacune de ses dimensions.

4. On nomme *Point* ce qui, considéré dans l'étendue, n'a aucunes parties.

Lorsque les Géomètres veulent indiquer un certain endroit d'une étendue, ils donnent à cet endroit le nom de *Point* géométrique, ou seulement de *Point*. Or cet endroit, c'est-à-dire ce *Point*, n'a aucunes parties. Car, s'il pouvoit en avoir, chacune indiqueroit un endroit différent de celui que l'on voudroit indiquer. Ainsi, il ne détermineroit que d'une façon vague l'endroit dont il s'agiroit. Il faudroit donc alors, pour déterminer rigoureusement cet endroit, l'indi-

† L'épaisseur se nomme aussi la *profondeur*.

quer par telle ou telle partie d'un tel Point.

Mais cette telle ou telle partie auroit elle-même des parties, ou elle n'en auroit pas. Si elle n'en avoit pas, ce seroit elle qui seroit alors ce que l'on doit entendre par un Point géométrique ; puisque ce seroit alors elle qui détermineroit rigoureusement l'endroit dont il s'agiroit, & que le Point par lequel on l'auroit indiqué d'abord, ne l'auroit déterminé que confusément. Par conséquent ce dernier Point ne seroit plus ce que l'on entend par un Point géométrique.

Si au contraire cette telle ou telle partie pouvoit avoir elle-même des parties, on feroit sur elle le même raisonnement que l'on vient de faire sur un Point auquel on auroit pu en supposer ; & ainsi de suite à l'infini. Donc, le Point géométrique est rigoureusement indivisible ; & par conséquent il ne peut avoir aucunes parties.

Mais, puisque le Point géométrique ne peut avoir aucunes parties, on le conçoit, sans que l'on puisse cependant s'en former aucune image ; ni par conséquent le figurer. Ainsi, l'on est forcé de le représenter par le Point physique *, que l'on considère alors

* En physique, on nomme *Point*, un corps ou une surface, dont chaque dimension est *infinitement petite* ¶.

¶ Ces expressions, *infinitement petit*, *infinitement grand*, &c. ne signifient autre chose que le plus petit ou le plus grand que l'on puisse s'imaginer.

comme s'il étoit réellement le Point géométrique ; quoique , quelque petit que l'on puisse supposer un Point physique , il soit toujours effectivement étendu , au moins en deux sens.

5. On nomme *Ligne* , ce qui n'est étendu qu'en un sens.

La distance d'un lieu à un autre , ou , si l'on veut , celle d'un point à un autre , donne une idée très-exacte de ce que les Géomètres entendent par une *Ligne*. Car la distance d'un lieu à un autre n'est certainement étendue qu'en un sens ; puisqu'elle n'est autre chose que la longueur de l'espace qui est compris entre ces deux lieux , & qu'elle est absolument indépendante des deux autres sens en lesquels ce même espace est étendu. Or cette longueur est précisément ce que l'on doit entendre par une *Ligne*.

De plus , puisqu'une *Ligne* n'est étendue qu'en un sens , elle n'a ni largeur ni épaisseur ; car , si elle en avoit , elle seroit alors étendue en deux sens , ou en trois sens , & par conséquent elle ne seroit plus une *Ligne*.

Mais , puisque la *Ligne* géométrique n'est qu'une longueur , on la conçoit , sans que l'on puisse cependant s'en former aucune image ; ni par conséquent la figurer. Ainsi , l'on est aussi forcé de la représenter par la

ligne physique, que l'on considère alors comme n'ayant réellement aucune largeur; quoique, quelque étroite que l'on puisse supposer une Ligne physique, elle soit toujours effectivement étendue, au moins en deux sens.

COROLLAIRE.

6. *Il suit de cette définition, que les extrémités d'une ligne sont des points.*

Démonstration. Les extrémités d'une ligne ne sont étendues, ni en deux sens, ni
N. 5. en trois sens; puisque (n) les lignes ne le sont qu'en un seul. Elles ne sont point non plus étendues en un sens; puisque si elles
N. 5. l'étoient, elles seroient des lignes (n). Or
Fig. 1. les extrémités A & B d'une ligne AB, ne sont point des lignes; puisque si elles étoient des lignes, par exemple AC & BD, elles auroient des extrémités A & C, B & D; & par conséquent elles ne seroient point celles de la ligne AB, mais ce seroient leurs extrémités A & B qui le seroient. Ainsi, les extrémités d'une ligne ne sont étendues en aucun sens: donc elles n'ont aucunes*
N. 4. parties; & par conséquent (n) elles sont des points.

Donc, C. Q. F. D.

7. On nomme *Ligne droite* †, celle qui va directement d'un point à un autre.

*La ligne AB **, qui en allant du point A ^{Fig. 1.} au point B ne fait aucun détour, est une ligne droite.

8. On nomme *Ligne courbe*, celle qui ne va directement d'un point à un autre en aucune de ses parties.

*La ligne CD **, qui en allant du point C ^{Fig. 2.} au point D se détourne continuellement de la ligne droite, est une ligne courbe.

9. On nomme *Surface* ¶, ce qui n'est étendu qu'en deux sens.

Rien ne peut aussi donner une idée de la surface, qui soit plus simple & plus exacte, que de la définir, ce que l'on voit d'un corps. Car ce que l'on voit d'un corps n'est certainement étendu qu'en deux sens, & n'a par conséquent que de la longueur & de la largeur.

COROLLAIRE.

10. Il suit de cette définition, que les extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. Les extrémités d'une surface ne sont point étendues en trois sens; puis-

† Euclide ne considère que les lignes droites.

¶ La surface se nomme aussi *superficie* & *aire*.

N. 9. que (n) les surfaces ne le sont qu'en deux. Elles ne sont point non plus étendues en deux sens ; puisque si elles l'étoient, elles

N. 9. seroient des surfaces (n). Or les extrémités

Fig. 3. AD^* , BC , &c. d'une surface AC , ne sont point des surfaces ; puisque si elles étoient des surfaces, par exemple AF , GC , &c. elles auroient des extrémités AD , EF , BC , GH , &c. Par conséquent elles ne seroient point celles de la surface AC , mais ce seroient leurs extrémités AD , BC , &c. qui le seroient. Ainsi les extrémités d'une surface ne sont étendues ni en trois sens, ni en deux sens. Cependant elles sont étendues. Car, puisque les surfaces le sont en deux sens

N. 9. (n), il faut nécessairement que ce qui termine l'un de ces deux sens soit étendu en l'autre. Donc elles ne sont étendues qu'en un sens ;

N. 5. & par conséquent (n) elles sont des lignes.
 Donc , C. Q. F. D.

SCHOLIE.

II. Presque tous les nouveaux *Elémens* de *Géométrie* font considérer la ligne comme composée de points mis les uns aux bouts des autres ; la surface, comme composée de lignes couchées les unes à côté des autres ; & le corps, comme composé de surfaces posées les unes sur les autres. Mais il faut observer que les Auteurs de ces *Elémens* sont presque

tous des Physiciens ; & qu'en cette qualité ils considèrent la ligne comme ayant une largeur infiniment petite , & la surface , comme ayant une épaisseur infiniment mince. Ainsi, dans leur hypothèse , la ligne est réellement une surface infiniment étroite , & la surface un corps infiniment mince. Par conséquent , il n'y a aucune absurdité dans la manière dont on vient de dire qu'ils font considérer & la surface & le corps. Ils n'avanceroient non plus rien de contradictoire , en faisant considérer la ligne comme composée de points mis les uns aux bouts des autres , si par ces points ils entendoient des points physiques *. Mais c'est précisément ce qu'ils ne font pas , puisqu'ils conservent au point la même définition que les Géomètres lui donnent. Or, y a-t-il rien de plus absurde que de prétendre qu'en mettant les unes aux bouts des autres des choses qui n'ont absolument aucune étendue , il en résulte une longueur ?

Cependant un grand nombre de leurs démonstrations supposent cette absurdité ; & comme elles ne sont même la plupart que des démonstrations purement physiques , elles sont très-susceptibles d'être contredites. Aussi plusieurs Auteurs célèbres , qui dans leurs

* Voyez la première note du n° 4.

écrits ont parlé des différens degrés de certitude des connoissances humaines, & qui ne connoissent la Géométrie que par ce qu'ils en ont lu dans les nouveaux Elémens, soutiennent que non-seulement les vérités géométriques ne sont que des vérités de convention ; mais de plus, que la Géométrie elle-même est une science pleine d'absurdités, étant toute fondée sur la supposition que l'étendue résulte de ce qui n'en a point ; c'est-à-dire du point mathématique, qui n'a ni longueur, ni largeur, ni épaisseur. Que nous resteroit-il donc de certain, si, égarés par des définitions trop peu exactes, on parvenoit à nous faire aussi douter même des vérités géométriques ?

Il résulte encore un autre inconvénient de l'abus qui a introduit la Physique dans la Géométrie : c'est que les personnes qui n'étudient cette dernière science que dans les nouveaux Elémens, perdent les principaux avantages qu'ils pourroient retirer de cette étude, qui sont ceux de se former le raisonnement, & de se rendre l'esprit juste.

12. On nomme *Surface plane* †, celle que tous les points d'une ligne droite toucheroient au même instant, en quelque

† La surface plane se nomme aussi un *plan* ; Euclide ne considère que ces surfaces.

sens que l'on posât cette ligne sur cette surface.

Lorsque l'on veut s'assurer qu'une surface est plane, on lui applique une règle en différents sens; & l'on examine à chaque position si cette règle la touche par-tout. Les ouvriers ne s'y prennent point autrement pour rectifier leurs ouvrages.

13. On nomme *Surface courbe*, celle que tous les points d'une ligne droite ne toucheroient point au même instant, si l'on posoit cette ligne sur cette surface en un certain sens.

14. On nomme *Angle* ¶, l'ouverture de deux lignes qui ont un point commun.

L'ouverture des lignes BA^* & BC , qui ont le point B commun, est un angle. Fig. 4.

15. On nomme *Côtés* d'un angle, les deux lignes qui le forment.

Les lignes BA^* & BC , sont les côtés de l'angle B . Fig. 4.

16. On nomme *Sommet* d'un angle, le point qui est commun à ses côtés.

Le point B^* , qui est commun aux lignes BA & BC , est le sommet de l'angle B . Fig. 4.

¶ L'angle que l'on définit ici se nomme *angle-plan*, pour le distinguer d'un angle d'un autre genre, dont il est parlé qu'au onzième Livre.

SCHOLIE I.

17. Lorsque plusieurs angles ont le même sommet, on les indique par leurs côtés ; parce que la lettre qui est à leur sommet n'en désigneroit aucun en particulier. Ainsi, pour indiquer l'angle qui est à la droite de la

Fig. 5. ligne AB^* , on dit, l'angle formé par les lignes AB & BC ; & pour indiquer celui qui est à la gauche de la même ligne, on dit, l'angle formé par les lignes AB & BD . Mais on abrége ordinairement cette expression, en disant seulement l'angle ABC pour indiquer le premier, & l'angle ABD pour indiquer le second. Remarquez que lorsqu'on se sert de cette expression abrégée, la seconde lettre est toujours celle du sommet de l'angle dont il s'agit.

SCHOLIE II.

Fig. 4. 18. Si l'on fait tourner la ligne BC^* autour du point B , de manière que ce point soit toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC , plus le point C s'éloignera du point A , plus l'ouverture de ces lignes sera grande ; & plus il s'en approchera, moins elle le sera. Ainsi, la grandeur de cette ouverture dépend de la position respective des

N. 14. lignes qui la forment. Mais (n) cette ou-

ouverture est un angle dont (n) ces lignes sont N. 15.
les côtés. Donc la grandeur d'un angle dépend de la position respective de ses côtés ; & par conséquent , quelque augmentation ou diminution que l'on fasse aux côtés d'un angle , on n'augmente ni ne diminue cet angle ; puisque ni cette augmentation , ni cette diminution , ne change la position respective de ses côtés.

19. On nomme réciproquement *Lignes perpendiculaires*, deux lignes qui se rencontrent de manière que l'une forme avec l'autre , prolongée s'il est nécessaire , deux angles égaux.

La ligne AB^* , qui forme avec la ligne DC deux angles égaux ABC & ABD , est perpendiculaire à cette ligne DC . Fig. 6.

20. On nomme réciproquement *Lignes obliques*, deux lignes qui se rencontrent de manière que l'une forme avec l'autre , prolongée s'il est nécessaire , deux angles inégaux.

La ligne AB^* , qui forme avec la ligne DC deux angles inégaux ABC & ABD , est oblique à cette ligne DC . Fig. 7.

21. On nomme *Angle droit*, celui dont l'un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

L'angle A^* est droit. Fig. 7.

22. On nomme *Angle obtus*, celui qui est plus grand, c'est-à-dire plus ouvert, qu'un angle droit.

Fig. 8. *L'Angle B* est obtus.*

23. On nomme *Angle aigu*, celui qui est plus petit, c'est-à-dire moins ouvert, qu'un angle droit.

Fig. 9. *L'angle C* est aigu.*

24. On nomme *Terme*, l'extrémité d'une étendue.

25. On nomme *Figure*, une étendue qui est terminée de tous les côtés.

26. On nomme *Figures égales*, celles qui contiennent des espaces égaux.

SCHOLIE.

27. *Il ne faut point confondre les figures égales avec les figures semblables. Par exemple, une figure de trois côtés, qui contient autant d'espace qu'une de quatre, est égale à cette figure de quatre côtés, & ne lui est point semblable. Un petit cercle, au contraire, est semblable à un grand, & ne lui est point égal. On verra au sixieme Livre les conditions que des figures doivent avoir pour être semblables.*

28. On nomme *Cercle*, une figure plane

qui est terminée par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de cette figure.

La figure X^ est un cercle.*

Fig. 10.

29. On nomme *Circonférence* † d'un cercle, la ligne qui le termine.

La ligne $ABDE^$ est la circonférence du cercle X .*

Fig. 10.

30. On nomme *Arc de cercle*, une partie quelconque de la circonférence d'un cercle.

La partie, par exemple AB^ , de la circonférence du cercle X , est un arc de cercle.*

Fig. 10.

31. On nomme *Degré*, un arc de cercle qui est la 360^e partie de la circonférence d'un cercle; *Minute*, un arc de cercle qui est la 60^e partie d'un degré; *Seconde*, un arc de cercle qui est la 60^e partie d'une minute; *Tierce*, un arc de cercle qui est la 60^e partie d'une seconde; & ainsi de suite.

32. On nomme *Centre* d'un cercle, le point qui est également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle.

Le point C^ est le centre du cercle X .*

Fig. 10.

† Le nom de *circonférence* se donne non-seulement à la ligne qui termine un cercle, mais aussi à toute ligne qui termine une surface quelconque. Une circonférence se nomme aussi un *périmètre*, une *périférie*, & un *circuit*.

16 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

33. On nomme *Diametre* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de ce cercle, & est terminée de part & d'autre par sa circonférence.

Fig. 10. La ligne AD^* est un diametre du cercle X .

34. On nomme *Rayon* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de ce cercle à sa circonférence.

Fig. 10. La ligne CB^* est un rayon du cercle X .

COROLLAIRE.

35. Il suit des Nos 28, 32, 33 & 34, *Premièrement*, que tous les diametres d'un même cercle sont égaux; *secondement*, que le rayon d'un cercle est la moitié de son diametre; *troisièmement enfin*, que tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

36. On nomme *Demi-cercle*, une figure plane qui est terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle, & par son diametre.

Fig. 11. La figure Y^* est un demi-cercle.

SCHOLIE.

37. On peut toujours considérer un angle quelconque BAC^* , comme ayant été formé par une ligne droite AC , qui, après avoir

Fig. 12.

été posée sur une autre AB , s'en seroit écartée vers C , en tournant autour du point fixe A , qui est le sommet de cet angle; & en décrivant avec ses autres points E , G , C , &c. des arcs de cercle DE , FG , BC , &c. qui ont ce même point A pour centre, & sont compris entre les côtés AB & AC de ce même angle.

Mais si une ligne droite AC , ayant l'une quelconque A de ses extrémités fixe, fait une révolution entière autour de cette extrémité, chacun de ses autres points E , G , C , &c. décrit une circonférence de cercle: si elle ne fait que la moitié d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que la moitié d'une circonférence: si elle ne fait que le tiers d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que le tiers d'une circonférence; & ainsi de suite.

Donc, lorsque des arcs de cercle DE , FG , BC , &c. ont pour centre le sommet A d'un angle quelconque BAC , & sont compris entre les côtés AB & AC de ce même angle; le premier DE est même partie de la circonférence du cercle dont AD est le rayon, que le second FG l'est de la circonférence du cercle dont AF est le rayon, que le troisieme BC l'est de la circonférence du cercle dont AB est le rayon; & ainsi de suite. Par conséquent tous ces arcs sont

semblables ; c'est-à-dire , sont chacun d'un même nombre de degrés.

Ainsi , si l'un quelconque des arcs lE , nG , PC , &c. d'un angle PAC † , est d'autant de degrés que l'un quelconque des arcs Dk , Fm , BO , &c. d'un autre angle BAO ; le chemin que le point C est supposé avoir fait pour s'avancer de P en C , est égal à celui que le point O est aussi supposé avoir fait pour s'avancer de B en O . Donc , la ligne AC s'est alors autant écartée de la ligne AP en tournant autour du point fixe A , que la ligne AO s'est écartée de la ligne AB en tournant autour du même point. Par conséquent l'angle PAC que forment les deux premières , est égal à l'angle BAO qui est formé par les deux dernières.

Pareillement , si l'un quelconque des arcs kE , mG , OC , &c. d'un angle OAC , est de deux fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs Dk , Fm , BO , &c. d'un autre angle BAO , le premier angle est double du second : si l'un quelconque des arcs DE , FG , BC , &c. d'un angle BAC , est de trois fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs Dk , Fm , BO , &c. d'un au-

† On nomme arcs d'un angle , des arcs qui ont le sommet de cet angle pour centre , & sont compris entre les côtés de ce même angle.

tre angle BAO ; le premier angle est triple du second ; & ainsi de suite.

Donc , la mesure naturelle d'un angle , est un arc de cercle quelconque compris entre les côtés de cet angle , & décrit de son sommet pris pour centre ; & le nombre des degrés de cet arc , est la valeur de ce même angle.

Par exemple , la mesure de l'angle BAC , est celui des arcs DE , FG , &c. que l'on veut ; & le nombre des degrés que cet arc contient , est la valeur de cet angle.

COROLLAIRE.

38. Il suit de cette scholie , qu'un angle droit est de 90 degrés.

Démonst. Lorsqu'un angle est droit ; l'arc de cercle qui est décrit de son sommet , & compris entre ses côtés , est le quart de la circonférence d'un cercle. Or (n) le quart N. 31. de la circonférence d'un cercle est de 90 degrés. Donc un angle droit est de 90 degrés.

39. On nomme *Complément* d'un angle , la différence de cet angle à 90 degrés ; & *Supplément* d'un angle , la différence de cet angle à 180 degrés.

40. On nomme *Figure rectiligne* , celle qui n'est terminée que par des lignes droites.

On tire la dénomination des figures , ou du nombre de leurs côtés , ou de celui de leurs angles. Or , lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses côtés , on nomme :

41. *Trilatere ou Triligne* , une figure qui a trois côtés ; *Quadrilatere ou Quadriligne* , celle qui en a quatre ; *Figure de vingt côtés* , celle qui en a vingt ; *de cent côtés* , celle qui en a cent ; & en général *Multilatere* , celle qui en a plusieurs.

Et lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses angles , on nomme :

Trigone ou Triangle , une figure qui a trois angles ; *Tétragone* , celle qui en a quatre ; *Pentagone* , celle qui en a cinq ; *Exagone* , celle qui en a six ; *Eptagone* , celle qui en a sept ; *Octogone* , celle qui en a huit ; *Ennéagone* , celle qui en a neuf ; *Décagone* , celle qui en a dix ; *Endécagone* , celle qui en a onze ; *Dodécagone* , celle qui en a douze ; *Pentédécagone* , celle qui en a quinze ; & en général *Polygone* , celle qui en a plusieurs.

On tire aussi la dénomination des triangles , ou de leurs côtés , ou de leurs angles. Or , lorsque l'on tire de ses côtés la dénomination d'un triangle , on nomme :

42. *Triangle équilatéral*, celui dont tous les côtés sont égaux.

*Le triangle A * est équilatéral.* Fig. 13.

43. *Triangle isoscele*, celui qui a deux côtés égaux.

*Le triangle B * est isoscele.* Fig. 14.

44. *Triangle scalène*, celui dont tous les côtés sont inégaux.

*Le triangle C * est scalène.* Fig. 15.

Et lorsque l'on tire de ses angles la dénomination d'un triangle, on nomme :

45. *Triangle rectangle*, celui qui a un angle droit.

*Le triangle A * est rectangle.* Fig. 16.

46. *Triangle obtusangle*, celui qui a un angle obtus.

*Le triangle B * est obtusangle.* Fig. 17.

47. *Triangle acutangle*, celui dont tous les angles sont aigus.

*Le triangle C * est acutangle.* Fig. 18.

48. On nomme *Hypoténuse*, le côté d'un triangle rectangle, qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

49. On nomme *Angle extérieur* d'un triangle, un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce même triangle.

Fig. 19. L'angle ABC^* est l'angle extérieur du triangle DAB .

A l'égard de la dénomination des quadrilateres, elle dépend tout à-la-fois & de leurs côtés & de leurs angles. Ainsi l'on nomme :

50. *Quarré*, un quadrilatre dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 20. La figure A^* est un quarré.

51. *Quarré long*, un quadrilatre dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 21. La figure B^* est un quarré long.

52. *Rhombe* ou *Lozange*, un quadrilatre dont tous les côtés sont égaux, mais dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 22. La figure C^* est un rhombe.

53. *Rhomboïde*, un quadrilatre dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 23. La figure D^* est un rhomboïde.

54. On nomme *Trapeze*, tout quadrilatre différent des quatre que l'on vient de définir.

55. On nomme *Lignes parallèles*, celles dont tous les points des unes sont égale-

ment éloignés de tous les points correspondans des autres.

Les lignes AB^ & CD sont paralleles.* Fig. 14.

COROLLAIRE.

56. *Il suit de cette définition, que des lignes paralleles ne se rencontrent point.*

57. On nomme *Parallélogramme*, toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles.

SCHOLIE.

58. *Il est démontré au N^o 127, que les côtés opposés du quarré, du quarré long, du rhombe & du rhomboïde, sont paralleles. Ainsi, ces quatre figures sont parallelogrammes †; & comme les deux premieres ont tous leurs angles droits, on les appelle des Parallelogrammes rectangles, ou seulement des Rectangles.*

Mais il faut remarquer que, quoique toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles soit un parallelogramme, cependant on ne donne cette dénomination qu'aux quatre figures précédentes.

† Ces noms, quarré, parallelogramme & rectangle, sont substantifs & adjectifs. Ainsi, être parallelogramme, c'est avoir les côtés opposés paralleles; & être rectangle, c'est avoir des angles droits,

59. On nomme *Diagonale* d'un quadrilatere, une ligne droite tirée de l'un quelconque des angles de ce quadrilatere, à l'angle opposé de ce même quadrilatere.

Fig. 25. La ligne AC^* est la diagonale du quadrilatere DB .

60. Enfin, on nomme *Complémens* d'un parallélogramme, deux parallélogrammes formés de part & d'autre de la diagonale du premier, par deux lignes paralleles à ses côtés, chacune à chacun, & qui ont un point commun entr'elles & cette même diagonale.

Fig. 25. Les parallélogrammes DF^* & FB sont les complémens du parallélogramme DB .

DEMANDES.

On demande qu'il soit permis :

Premièrement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque à quelque autre point que l'on veuille ; & *par conséquent*, de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

Secondement, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

61. *Troisièmement* enfin, de prendre indifféremment l'une pour l'autre, deux quantités égales.

AXIOMES.

AXIOMES.

62. Les quantités qui sont égales chacune à une même quantité, sont égales entr'elles.

63. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités égales, forment des sommes égales.

64. Les quantités égales étant retranchées de quantités égales, laissent des restes égaux.

65. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités inégales, forment des sommes inégales.

66. Les quantités égales étant retranchées de quantités inégales, laissent des restes inégaux.

67. Les quantités qui sont doubles, triples, quadruples, &c. de quantités égales, sont égales.

68. Les quantités qui sont les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de quantités égales, sont égales.

69. Deux lignes droites, ou deux figures planes, qui étant posées l'une sur l'autre ne se surpassent point, c'est-à-dire, se couvrent réciproquement, sont égales.

COROLLAIRE.

70. *Il suit de cet axiome : Premièrement, que si deux lignes droites égales sont posées l'une sur l'autre, de manière que l'une des extrémités de la première soit sur l'une des extrémités de la seconde, l'autre extrémité de la première fera sur l'autre extrémité de la seconde.*

71. *Secondement, que si deux angles égaux sont posés l'un sur l'autre, de manière que le sommet du premier étant sur le sommet du second, l'un des côtés du premier soit sur l'un des côtés du second, l'autre côté du premier fera sur l'autre côté du second.*

72. *Une quantité est égale à la somme de toutes ses parties ; & par conséquent, plus grande qu'aucune de ses parties.*

COROLLAIRE.

73. *Il suit de cet axiome, que la somme des produits de toutes les parties d'une quantité, multipliées chacune par un même multiplicateur, est égale au produit de cette même quantité multipliée aussi par ce même multiplicateur.*

Par exemple, 7 & 5 sont toutes les par-

ies de 12. Or, si l'on multiplie 7 & 5 chacun, par exemple par 4, la somme des produits 28 & 20, sera égale au produit 48 de 12 multiplié aussi par 4.

74. Deux lignes droites qui ont deux points communs, sont posées l'une sur l'autre, & ne font qu'une seule ligne droite.

COROLLAIRE.

75. Il suit de cet axiome : Premièrement, que deux lignes droites ne se rencontrent qu'en un point. Secondement, que deux lignes droites ne ferment point un espace.



PROPOSITION I.

PROBLÈME.

76. *Décrire sur une ligne droite donnée, un triangle équilatéral.*

Fig. 25. **I**L faut décrire sur la ligne droite AB* un triangle équilatéral.

Construction. Avec la même ligne AB prise pour rayon, décrivez du point A pris pour centre, un cercle DCB; & du point B pris pour centre, un autre cercle ACE. Du point C, commune section des circonférences de ces deux cercles, tirez aux points A & B les lignes droites CA & CB. Le triangle ACB que ces lignes formeront avec la ligne AB, fera équilatéral.

Démonst. Les lignes AB & AC sont
 N. 35. égales (n), puisque [c] elles sont rayons
 N. 35. du même cercle DCB. Or (n), les lignes
 AB & BC sont aussi égales; puisque [c]
 elles sont rayons du même cercle ACE.
 N. 62. Donc (n), les lignes AB, AC & BC
 N. 42. sont égales; & par conséquent (n), le
 triangle ACB qu'elles forment, est équi-
 latéral.

Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

77. Pour avoir le point C^* , il suffit de Fig. 26.
 décrire avec la ligne AB prise pour rayon,
 & des points A & B pris pour centres, deux
 arcs qui se coupent réciproquement.

USAGE.

78. On peut se servir du triangle équi-
 latéral pour mesurer une distance inaccessible;
 par exemple, la largeur d'une rivière.
 Il faut pour cela décrire sur une planche un
 triangle équilatéral ABC^* , & s'en servir de Fig. 27.
 cette manière :

On pose horizontalement le triangle
 ABC , & l'on dirige son côté AC de ma-
 nière qu'il soit parallèle au lit de la ri-
 vière. En regardant ensuite d'alignement
 au côté AB , on observe un point D au-
 delà de cette rivière; & d'alignement au
 côté AC , un autre point F éloigné de cinq
 à six toises du point A . On fait mettre un
 piquet en A , & un autre en F . On trans-
 porte ensuite le triangle ABC vers E ; &
 l'on fait en sorte d'y trouver un point c où
 l'on puisse poser ce même triangle, de ma-
 nière qu'en regardant d'alignement au côté
 ca , le piquet F empêche de voir le piquet A ;
 & d'alignement au côté cb , on voye le
 même point précédent D . Lorsque l'on est

parvenu à trouver ce point c , les rayons visuels AD , Ac & cD forment un triangle ADc qui est équilatéral, & dont on peut mesurer le côté Ac . Or, on démontre par une conséquence du n° 171, que dans un triangle équilatéral, le quarré de la perpendiculaire est triple de celui de la moitié du côté. Ainsi, lorsque l'on connoît le côté Ac , il est facile de trouver la valeur de la perpendiculaire DG ; de laquelle si l'on ôte la distance HG du bord de la rivière à la ligne Ac , le reste DH est la largeur demandée.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

79. Tirer d'un point donné, une ligne droite qui soit égale à une autre.

Fig. 28. **I**L faut tirer du point C^* une ligne droite qui soit égale à la ligne AB .

Const. Avec un rayon égal à la ligne AB , & du point C pris pour centre, décrivez un cercle FDE . Du même point C , tirez à un point quelconque D de la circonférence de ce cercle, une ligne droite CD . Cette ligne sera égale à la ligne AB .

Démonst. La ligne CD est $[C]$ un rayon du cercle FDE ; & le rayon de ce cercle est égal $[C]$ à la ligne AB . Donc (n) N. 61. la ligne CD est égale à la ligne AB .

Par conséquent, C. Q. F. F.

S C H O L I E.

80. Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne AB^* ; de poser en-Fig. 23. suite l'une des pointes de ce compas au point C ; de marquer avec l'autre un point D ; & de tirer de ce point C au point D une ligne droite CD .

On n'a fait décrire ici le cercle FDE , que parce que sa circonférence renferme tous les points qui peuvent résoudre ce problème.



PROPOSITION III.

PROBLÈME.

81. *Diviser une ligne droite en deux parties, dont l'une soit égale à une autre ligne droite plus petite que la première.*

Fig. 29. **I**L faut diviser la ligne droite AB* en deux parties, dont l'une soit égale à la ligne droite CD, qui est plus petite que la ligne AB.

Const. Avec un rayon égal à la ligne CD, & de l'une des extrémités de la ligne AB prise pour centre, (par exemple, du point A,) décrivez un arc de cercle EFG. Cet arc divisera la ligne AB au point F, comme il est demandé.

Démonst. La partie AF de la ligne AB est [C] un rayon de l'arc EFG. Or, ce rayon est égal [C] à la ligne CD. Donc
N. 62. (n), la partie AF de la ligne AB est égale à la ligne CD.

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

82. Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun : ils auront aussi le troisième côté égal au troisième côté ; les autres angles égaux aux autres angles, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.

SI dans les triangles ABC* & DEF l'an- Fig. 30.
gle A est égal à l'angle D, le côté AB au côté DE, & le côté AC au côté DF ; le côté BC sera égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Posez par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de manière que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le côté DE (n), puisque [H] l'angle A est égal à N. 71.
l'angle D : & le point B tombera sur le point E (n), puisque [H] ces mêmes cô- N. 70.
tés AB & DE sont égaux. Or, le point C tombera sur le point F (n), puisque [H] le N. 70.

B v

côté AC est égal au côté DF. Donc, le point A étant [C] sur le point D, le point B tombe sur le point E, & le point C sur le point F. Ainsi, les triangles ABC & DEF se couvrent réciproquement; & N. 69. par conséquent (n), le côté BC est égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF.

Donc, C. Q. F. D.

U S A G E.

83. On peut se servir de cette proposition, de la manière suivante, pour mesurer une distance AB* qui n'est accessible que par ses extrémités A & B.

On choisit dans la campagne un point C d'où l'on puisse voir les extrémités A & B de cette distance, & aller directement à chacune. On pose un graphometre † à ce point C. On dirige l'une des règles de cet instrument vers le point A, & l'autre vers le point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C formé par les deux rayons visuels CA & CB. Enfin on mesure ces deux rayons visuels.

On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme un angle c égal à l'an-

† Le graphometre est un instrument fait exprès pour mesurer les angles sur le terrain.

gle C. On fait les côtés ca & cb de cet angle égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun; & du point a au point b , on tire la ligne droite ab .

Or, cette ligne est égale (n) à la distance N. 82. inaccessible AB ; puisque [C] les triangles ABC & abc ont l'angle C égal à l'angle c , & les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés ca & cb qui forment le second, chacun à chacun. Ainsi, si l'on mesure la ligne ab , ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance AB .

Il est plus commode de rapporter sur le papier le triangle ABC par le moyen d'une échelle, que de le rapporter sur le terrain; & cette dernière manière fait également connoître la valeur de la distance AB ; parce que le côté ab du triangle rapporté contient autant de parties de l'échelle, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer les rayons visuels CA & CB , comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.



PROPOSITION V.

THÉORÈME.

84. *Si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

Fig. 31. **S** I dans le triangle ABC* le côté BA est égal au côté BC, l'angle C sera égal à l'angle A.

Const. Supposez qu'une ligne droite BD divise l'angle ABC en deux parties égales CBD & ABD.

Démonst. Dans les triangles BDC & BDA, l'angle CBD est égal [C] à l'angle ABD, le côté BC au côté BA [H], &
N. 32. le côté BD est commun. Ainsi (n), l'angle C est égal à l'angle A.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

85. Il suit de ce théorème, que dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux.



PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

86. *Si dans un Triangle deux angles sont égaux , les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

SI dans le triangle ABC* l'angle A est Fig. 33. égal à l'angle C , le côté BC sera égal au côté BA.

Démonst. Si le côté BC n'étoit point égal au côté BA , il feroit ou plus grand , ou plus petit que ce dernier côté ; & par conséquent , pour le lui rendre égal , il faudroit ou le diminuer , ou l'augmenter. Mais, on ne peut ni diminuer ni augmenter ce côté BC , sans diminuer ou augmenter en même temps l'angle A ; & par conséquent , sans faire cesser cet angle d'être égal à l'angle C. Donc , si l'angle A est égal à l'angle C , le côté BC ne peut point être inégal au côté BA ; & par conséquent , il lui est égal.

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

87. Il suit de ce théorème , que *si dans un triangle tous les angles sont égaux , ce triangle sera équilatéral.*

PROPOSITION VIII. †

THÉORÈME.

88. Si deux triangles ont les côtés égaux aux côtés, chacun à chacun : ils auront aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.

Fig. 34. SI dans les triangles ABC* & DEF le côté AC est égal au côté DF, le côté AB au côté DE, & le côté BC au côté EF ; l'Angle B sera égal à l'angle E, l'angle C à l'angle F, l'angle A à l'angle D, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Du point D pris pour centre, & avec le côté DE pris pour rayon, décrivez le cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec le côté EF pris pour rayon, décrivez un autre cercle EH. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de manière que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Premièrement, le point C
N. 70. tombera sur le point F (n) ; puisque [H]
le côté AC est égal au côté DF.

† Nous supprimons la septieme Proposition d'Euclide, parce qu'elle est comprise dans la huitieme.

Secondement, le point B, extrémité du côté AB, tombera (n) sur la circon-N. 37.
férence du cercle EG; puisque [C] le point A fera sur le point D, & que [H] le côté AB est égal au côté DE, qui [C] est le rayon de ce cercle.

Mais (n) le même point B, extrémité N. 35.
du côté BC, tombera aussi sur la circonférence du cercle EH; puisque [D] le point C fera sur le point F, & que [H] le côté BC est égal au côté EF, qui [C] est le rayon de cet autre cercle.

Donc le point B tombera sur un point commun à ces deux circonférences; & par conséquent sur le point E, puisque ces deux circonférences n'ont au dessus du côté DF que ce seul point de commun.

Or, puisque le point A étant [C] sur le point D, le point C tombe sur le point F, & le point B sur le point E; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle B est égal à N. 69.
l'angle E, l'angle C à l'angle F, l'angle A à l'angle D, & le triangle ABC au triangle DEF.

Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

89. On vient de voir que dans les trian-

gles l'égalité des côtés nécessite celle des angles. Mais il faut bien se donner de garde d'en conclure que l'égalité des angles nécessite aussi celle des côtés. On verra dans la suite, que les triangles qui ont tous leurs angles égaux, chacun à chacun, sont très-souvent inégaux; quoique alors ils soient toujours nécessairement semblables.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

90. *Diviser un angle en deux parties égales.*

Fig. 35. **I**L faut diviser l'angle ABC* en deux parties égales.

Const. Du point B pris pour centre, & avec un rayon BD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, les côtés BA & BC de l'angle ABC. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon BD, (ou avec un autre pris aussi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la distance du point D au point E,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point B par le point F la ligne droite

BF. Elle divisera l'angle ABC en deux parties ABF & CBF qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonst. Dans les triangles DBF & EBF, le côté BD est égal [C] au côté BE, le côté FD au côté FE [C], & le côté BF est commun. Ainsi (n), l'angle ABF n. 83. est égal à l'angle CBF.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

91. Il suit de ce problème, que *pour diviser un angle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

SCHOLIE.

92. Il est souvent nécessaire de diviser un angle en un nombre déterminé de parties égales. Mais lorsque ce nombre n'est pas 2, 4, 8, 16, & ainsi de suite en doublant, le problème n'est plus du ressort de la Géométrie élémentaire; & il est démontré qu'on ne peut le résoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors

le problème de la trisection de l'angle. Il a été fort recherché par les anciens Géomètres, & abandonné avec raison par les modernes.

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

93. *Diviser une ligne droite en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales la
Fig. 36. ligne droite AB*.

Const. Des points A & B pris pour centres, & avec un rayon AC pris à volonté, (mais cependant plus grand que la moitié de la ligne AB,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point C. Des mêmes points A & B pris pour centres, & avec le même rayon AC, (ou avec un autre AD pris aussi à volonté, mais cependant toujours plus grand que la moitié de la ligne AB,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point D. Enfin, tirez du point C au point D la ligne droite CD. Elle divisera la ligne AB en deux parties AE & EB qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point C aux points A & B, les lignes droites CA & CB. Tirez aussi du point D aux

mêmes points A & B, les lignes droites DA & DB.

Démonst. Dans les triangles ACD & BCD, le côté CA est égal [C] au côté CB, le côté DA au côté DB [C], & le côté CD est commun. Ainsi (n), l'angle ACD N. 82. est égal à l'angle BCD. Or, dans les triangles ACE & BCE, l'angle ACD est égal [D] à l'angle BCD, le côté CA au côté CB [C], & le côté CE est commun. Ainsi (n), le côté AE est égal au côté EB. N. 81.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

94. Il suit de ce problème, que pour diviser une ligne droite en quatre parties égales, il faut commencer par la diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi; & ainsi de suite, pour la diviser en 8, en 16, en 32, &c.

Nous donnerons au sixieme Livre la maniere de diviser une ligne droite en tel nombre de parties égales que l'on voudra.



PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

95. *D'un point donné sur une ligne droite, élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. **I**L faut élever du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, la ligne AB prolongée s'il est nécessaire. Des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris aussi à volonté, (mais cependant plus grand que le rayon CD,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC; elle sera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonst. Dans les triangles DFC & EFC, le côté CD est égal [C] au côté CE, le côté FD au côté FE [C], & le
N. 88. côté FC est commun. Ainsi (n), l'angle FCD est égal à l'angle FCE; & par consé-

quent (n), la ligne FC est perpendiculaire N. 19.
à la ligne AB.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

96. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaisser une perpendiculaire à cette ligne.*

IL faut abaisser du point C* une perpen- Fig. 38.
diculaire à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, (mais cependant plus grand que la distance de ce point à la ligne AB,) décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, cette ligne prolongée s'il est nécessaire. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon CD, (ou avec un autre DF pris aussi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la distance du point D au point E,) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point C par le point F la ligne droite CG; elle fera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration, tirez du point C aux points D & E, les lignes droites CD & CE. Tirez aussi du point F aux mêmes points D & E, les lignes droites FD & FE. Prolongez ensuite la ligne CG jusqu'au point F.

- Démonst.* Dans les triangles DCF & ECF, le côté CD est égal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c], & le côté CF est commun. Ainsi (n), l'angle DCF est égal à l'angle ECF. Or, dans les triangles DCG & ECG, l'angle DCF est égal [D] à l'angle ECF, le côté CD au côté CE [c], & le côté CG est commun.
- N. 82. Ainsi (n), l'angle CGD est égal à l'angle CGE; & par conséquent (n) la ligne CG est perpendiculaire à la ligne AB.

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

97. Une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, forme avec elle, prolongée s'il est nécessaire, deux angles dont la somme est égale à celle de deux angles droits.

LA somme des angles ABC^* & ABD Fig. 39 est égale à celle de deux angles droits. & 40.

La ligne AB est ou perpendiculaire, ou oblique à la ligne CD .

Premier cas. Lorsque la ligne AB^* est Fig. 39. perpendiculaire à la ligne CD .

Démonst. Les angles ABC & ABD sont deux angles droits (n). Ainsi leur N. 21. somme est égale à celle de deux angles droits.

Second cas. Lorsque la ligne AB^* est Fig. 40. oblique à la ligne CD .

Const. Du point B , élevez (n) la per- N. 95. pendiculaire BE à la ligne CD .

Démonst. La somme des deux angles ABC & ABD est égale (n) à celle des trois N. 72. angles EBC , EBA & ABD . Or, celle de ces trois angles est égale (n) à celle des N. 72. deux angles EBC & EBD ; & [c] ces

N. 62. deux derniers angles sont deux angles droits. Donc (n), la somme des deux angles ABC & ABD est égale à celle de deux angles droits.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

98. Il suit de ce théorème, que la somme de tous les angles qui sont formés par plusieurs lignes droites tirées d'un même point & en tout sens, est égale à celle de quatre angles droits.

Fig. 41. La somme de tous les angles ACB *, BCD, DCE, ECF & FCA, est égale à celle de quatre angles droits.

Const. Prolongez l'un des côtés de ces angles, par exemple le côté AC, vers G à volonté.

N. 72. *Démonst.* La somme des trois angles BCD, DCE & ECF, est égale (n) à celle des deux angles BCG & GCF. Mais N. 97, (n), les angles ACB & BCG valent ensemble deux angles droits; & il en est de même des angles FCA & GCF. Donc, la somme des angles ACB, BCD, DCE, ECF & FCA, est égale à celle de quatre angles droits.

Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

USAGE.

99. On se sert de cette proposition , de la maniere suivante , pour connoître sur le terrain la valeur d'un angle dans lequel on ne peut point entrer ; par exemple , celle d'un angle ABC^* formé par le concours de deux murs BA & BC . Fig 44.

Par le moyen d'une corde , ou de quelque autre instrument , on prolonge à volonté vers D , l'alignement de l'un AB de ces deux murs. On mesure \dagger ensuite l'angle DBC formé par le prolongement BD & par le mur BC . Et puisque (n) les angles ABC N. 97. & DBC valent ensemble 180 degrés , la différence de ce dernier angle à 180 , sera la valeur de l'angle cherché ABC .

Si l'on trouve que l'angle DBC soit , par exemple , de 117 degrés , on en conclura que l'angle ABC est de 63 degrés.

\dagger La maniere la plus sûre de mesurer sur le terrain ces sortes d'angles , est de joindre leurs côtés par une ligne droite quelconque DC , afin d'avoir un triangle DBC : de mesurer ensuite , le plus exactement qu'il est possible , les côtés de ce triangle : & de chercher enfin la valeur de l'angle proposé DCB , comme nous l'avons enseigné dans notre trigonométrie.



PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

100. Si deux lignes droites qui sont tirées de l'extrémité d'une troisieme, forment avec cette troisieme deux angles dont la somme soit égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une seule ligne droite.

Fig. 42. SI la somme des angles ABC^* & ABD est égale à celle de deux angles droits, les deux lignes droites BC & BD ne font qu'une seule ligne droite CBD .

Const. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté, l'un au dessus de la ligne BD , & l'autre au dessous, les lignes droites BE & BF .

Démonst. Si les deux lignes BC & BD ne faisoient point une seule ligne droite CBD , la ligne BC étant prolongée vers D , passeroit ou au dessus de la ligne BD , ou au dessous.

Or, si elle passoit au dessus, & étoit, par exemple la ligne CBE ; la somme des angles ABC & ABE seroit égale à celle
 N. 97. de deux angles droits (n). Mais $[H]$, celle des angles ABC & ABD lui est aussi égale,

Donc (n), la somme des angles ABC & ^{N. 62.} ABE seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point, puisque cette premiere somme differe de la derniere, de l'angle EBD.

Et si elle passoit au dessous, & étoit, par exemple, la ligne CBF; la somme des angles ABC & ABF seroit égale à celle de deux angles droits (n). Mais [H], ^{N. 97.} celle des angles ABC & ABD lui est aussi égale. Donc (n), la somme des angles ABC & ^{N. 62.} ABF seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point encore, puisque cette premiere somme surpasse la derniere, de l'angle FBD.

Donc la ligne BC étant prolongée vers D, passe sur la ligne BD; & par conséquent ces deux lignes ne font qu'une seule ligne droite CBD.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

101. Deux lignes droites qui se coupent ,
forment quatre angles , dont chacun est
égal à celui qui lui est opposé au sommet.

Fig. 43. LES angles AEC* & BED sont égaux :
& il en est de même des angles CEB &
AED.

Démonst. La^e somme des angles AEC &
N. 97. CEB est égale (n) à celle de deux angles
droits ; & celle des angles CEB & BED
N. 62. l'est aussi. Donc (n), la somme des an-
gles AEC & CEB est égale à celle des an-
gles CEB & BED. Par conséquent, si l'on
retranche le même angle CEB de chacune
de ces deux sommes, les restes, qui seront
N. 64. les angles ACE & BED, seront égaux (n).

Or, on démontre de la même manière,
que les angles CEB & AED sont aussi
égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

102. *L'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

L'ANGLE extérieur BCD^* du triangle *Fig. 45.*
 ABC , est plus grand qu'aucun des deux angles intérieurs ABC & BAC qui lui sont opposés.

Premièrement. *Pour l'angle ABC .*

Const. Divisez (n) le côté BC en deux *N. 93.*
parties égales EB & EC . Tirez du point A par le point E , la ligne droite indéfinie AF . Faites (n) la ligne EF égale à la *N. 81.*
ligne EA . Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC .

Démonst. L'angle BCD est plus grand (n) que l'angle BCF . Or, l'angle BCF *N. 72.*
est égal (n) à l'angle ABC ; puisque, *N. 81.*
dans les triangles AEB & FEC , l'angle AEB est égal (n) à l'angle FEC qui lui *N. 101.*
est opposé au sommet, le côté EB au côté EC [c], & le côté EA au côté EF [c]. Donc l'angle BCD est plus grand que l'angle ABC .

Secondement. *Pour l'angle BAC.*

- N. 93. *Const.* Divisez (n) le côté AC en deux parties égales GC & GA. Tirez du point B par le point G, la ligne droite indéfinie BH. Faites (n) la ligne GH égale à ligne GB. Enfin, tirez du point H par le point C, la ligne droite indéfinie HF.
- N. 72. *Démonst.* L'angle BCD est (n) plus grand que l'angle FCD. Or, l'angle FCD est égal (n) à l'angle ACH qui lui est opposé au sommet : & l'angle ACH est égal (n) à l'angle BAC ; puisque, dans les triangles HGC & BGA, l'angle HGC est égal (n) à l'angle BGA, le côté GC au côté GA [c], & le côté GH au côté GB [c]. Donc l'angle BCD est plus grand que l'angle BAC.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

103. *La somme de deux quelconques des angles d'un triangle , est plus petite que celle de deux angles droits.*

DANS le triangle ABC *, la somme Fig. 45.
des angles , par exemple BCA & B , est
plus petite que celle de deux angles droits.

Const. Prolongez le côté AC vers D ,
à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA
& BCD est égale (n) à celle de deux an- N. 97.
gles droits. Or (n), l'angle BCD , qui est N. 102.
extérieur au triangle ABC , est plus grand
que l'angle intérieur B qui lui est opposé.
Donc la somme des angles BCA & B est
plus petite que celle de deux angles droits.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

104. Il suit de ce théorème , que si
dans un triangle l'un des angles est ou
droit , ou obtus , les deux autres seront
aigus.

Démonst. Si dans un triangle un angle étant ou droit, ou obtus, un autre l'étoit aussi, la somme de deux des angles de ce triangle seroit ou aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits.

N. 103. Or (n), cela ne peut point être.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

105. Il suit de ce corollaire, que *chaque angle d'un triangle équilatéral est aigu ; & qu'il en est de même de chaque angle égal d'un triangle isoscele.*

Démonst. Si l'un des angles d'un triangle équilatéral étoit ou droit, ou obtus, chaque autre angle du même triangle le
N. 83. seroit aussi ; puisque (n) tous les angles d'un triangle équilatéral sont égaux. Mais
N. 104. (n), un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus.

Donc, C. Q. F. 1^o D.

Pareillement, si l'un des angles égaux d'un triangle isoscele étoit ou droit, ou obtus, ce triangle auroit ou deux angles
N. 104. droits, ou deux angles obtus. Or (n), cela ne peut point être.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE III.

106. Il suit aussi de ce même corol-

laire, que d'un point hors d'une ligne droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.

Si la ligne droite CD^* est perpendi- Fig. 47
culaire à la ligne droite AB , toute autre ligne droite tirée à cette ligne AB d'un point quelconque de cette perpendiculaire, lui sera oblique.

Const. Tirez du point C pris à volonté sur la ligne CD , à un point quelconque E de la ligne AB , la ligne droite CE .

Démonst. Si les lignes CD & CE étoient perpendiculaires chacune à la même ligne AB , l'angle CDE seroit droit (n), N. 21. & l'angle CED le seroit aussi (n). Ainsi N. 21. le triangle ECD auroit deux angles droits.

Or (n), cela ne peut point être. Donc, N. 104. si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB , la ligne CE ne l'est point.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

107. Il suit encore du même corollaire, que si d'un point quelconque d'une ligne droite qui est oblique à une autre, on abaisse une perpendiculaire à cette autre; cette perpendiculaire sera du côté auquel l'oblique forme un angle aigu avec cette autre ligne.

Fig. 48.

Si d'un point quelconque C^* de la ligne droite CE , qui est oblique à la ligne droite AB , on abaisse une perpendiculaire à cette ligne AB ; cette perpendiculaire sera du côté de l'angle aigu CEB .

Const. Tirez du point C à un point quelconque F de la partie AE de la ligne AB , une ligne droite CF .

Démonst. Si la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB , étoit une ligne droite quelconque CF tirée du côté de l'angle obtus CEA , le triangle FCE auroit (n) un angle droit CFE , & [H] un angle obtus CEA . Or (n), un triangle ne peut point avoir un angle droit & un angle obtus. Donc la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB , sera du côté de l'angle aigu CEB .

N. 21.

N. 104.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

108. Il suit enfin du dernier corollaire, que *si de l'un des angles d'un triangle on abaisse une perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, cette perpendiculaire sera dans ce triangle, si les angles adjacens à ce côté sont de même espece* †; & hors de

† On appelle angles de même espece, ceux qui sont ou tous aigus, ou tous obtus; & angles de différente espece, ceux dont les uns sont aigus, & les autres obtus.

ce triangle, si ces mêmes angles sont de différente espece.

Premièrement. Si de l'angle B^* du Fig. 46. triangle ABC, dont les angles A & BCA adjacens au côté AC sont aigus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera dans ce triangle.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle B au côté CA, doit être (n) du N. 107. côté de l'angle aigu BAC, par rapport à l'oblique BA; & du côté de l'angle aigu BCA, par rapport à l'oblique BC. Donc elle doit rencontrer le côté AC entre les points A & C; & par conséquent, elle doit être dans le triangle ABC.

Secondement. Si de l'angle C^* du Fig. 48. triangle FCE, dont les angles CFE & CEF adjacens au côté FE, sont l'un aigu & l'autre obtus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera hors de ce triangle.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle C au côté FE, ne peut point (n) N. 107. être du côté de l'angle obtus CEF, par rapport à l'oblique CE. Donc il faut qu'elle soit du côté de l'angle aigu CEB; & par conséquent hors du triangle FCE.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

109. *Si dans un triangle un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté, sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

Fig. 49. SI dans le triangle ABC*, le côté BC est plus grand que le côté BA, l'angle BAC sera plus grand que l'angle C.

N. 81. *Const.* Prenez (n) sur le côté BC, une partie BD égale au côté BA. Tirez ensuite du point D au point A la ligne droite DA.

Démonst. L'angle BAC est plus grand N. 72. (n) que l'angle BAD. Or, l'angle BAD

N. 84. est égal (n) à l'angle BDA, puisque [c] les côtés BD & BA du triangle ABD sont égaux : & l'angle BDA qui est extérieur

N. 102. au triangle ADC, est plus grand (n) que l'angle intérieur C qui lui est opposé. Donc l'angle BAC est plus grand que l'angle C.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

110. Il suit de ce théorème : premièrement, que dans un triangle, le plus

grand angle est opposé au plus grand côté. Secondement, que les angles d'un triangle scalène sont inégaux.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

III. *Si dans un triangle un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle, sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.*

SI dans le triangle ABC* l'angle A est Fig. 10.
plus grand que l'angle C, le côté BC fera
plus grand que le côté BA.

Démonst. Si le côté BC étoit égal au
côté BA, l'angle A seroit égal à l'angle
C (n): & si le côté BC étoit plus petit N. 84.
que le côté BA, l'angle A seroit plus petit
que l'angle C (n). Or, l'angle A n'est ni N. 109.
égal à l'angle C, ni plus petit que l'angle
C, puisque [H] il le surpasse. Donc le
côté BC est plus grand que le côté BA.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

II2. Il suit de ce théorème: Premièrement, que dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle,

Secondement, que *si les angles d'un triangle sont inégaux, ce triangle sera scalène.*

COROLLAIRE II.

113. Il suit aussi de ce même théorème ; que *de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, la perpendiculaire est la plus courte.*

Fig. 47. La ligne droite CD^* qui est perpendiculaire à la ligne droite AB , est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne AB .

Const. Tirez du point C à un point quelconque E de la ligne AB , une ligne droite CE .

Démonst. L'angle CDE est le plus grand N. 104. angle du triangle ECD (n) ; puisque la ligne CD étant [H] perpendiculaire à la N. 21. ligne AB , cet angle est droit (n). Ainsi l'oblique CE est opposée à un plus grand angle que la perpendiculaire CD ; & par N. 111. conséquent (n) elle est plus grande que cette perpendiculaire.

Or, la même démonstration subsiste, quelque près que le point E soit du point D .

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

114. *Dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.*

DANS le triangle ABC^* , la somme des Fig. 51.
côtés, par exemple AB & BC , est plus grande que le côté AC .

Const. Prolongez le côté AB vers D , indéfiniment. Faites (n) le prolongement N. 81.
 BD égal au côté BC . Enfin, tirez du point D au point C la ligne droite DC .

Démonst. L'angle ACD est (n) plus N. 72.
grand que l'angle BCD . Or l'angle BCD est égal (n) à l'angle D ; puisque [c] N. 84.
les côtés BD & BC du triangle CBD sont égaux. Donc l'angle ACD est plus grand que l'angle D ; & par conséquent (n), N. 113.
dans le triangle ADC , le côté ABD est plus grand que le côté AC . Mais [c], ce
côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC . Donc, dans le triangle ABC , la somme des côtés AB & BC est plus grande que le côté AC .

Par conséquent, C. Q. F. D. †.

† On auroit pu mettre ce théorème au rang des axiomes.

PROPOSITION XXI.

PROBLÈME.

115. *Si deux lignes droites qui sont tirées des extrémités de l'un des côtés d'un triangle, se rencontrent dans ce triangle, leur somme sera plus petite que celle des deux autres côtés de ce même triangle; mais l'angle qu'elles formeront sera plus grand que celui qui est formé par ces deux autres côtés.*

PREMIÈREMENT, dans le triangle
 fig. 52. ABC^* , la somme ADC des deux lignes droites AD & DC , est plus petite que la somme $ABEC$ des deux côtés AB & BC .

Const. Prolongez l'une de ces lignes, par exemple la ligne AD , jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point E , l'un des côtés du triangle ABC .

Démonst. Dans le triangle ABE , la
 N. 114. somme ABE des côtés AB & BE est (n) plus grande que le côté ADE . Ainsi, si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne EC , la somme $ABEC$ fera
 N. 65. (n) plus grande que la somme $ADEC$.

Pareillement, dans le triangle DEC , la somme DEC des côtés DE & EC est

(n) plus grande que le côté DC. Ainsi, N. 114. si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne AD, la somme ADEC sera (n) plus grande que la somme ADC. N. 65.

Or, puisque [D] la somme ABEC est plus grande que la somme ADEC, & que cette dernière somme est plus grande que la somme ADC, la somme ABEC est plus grande que la somme ADC.

Donc, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT, dans le même triangle ABC, l'angle ADC est plus grand que l'angle B.

Démonst. L'angle ADC, qui est extérieur au triangle DEC, est (n) plus grand N. 102. que l'angle intérieur DEC qui lui est opposé. Or, cet angle DEC, qui est extérieur au triangle ABE, est aussi (n) plus N. 102. grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc l'angle ADC est plus grand que l'angle B.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.



PROPOSITION XXII.

PROBLÈME.

116. *Décrire un triangle qui ait les côtés égaux à trois lignes droites données, chacun à chacune ; pourvu cependant que chacune de ces lignes soit plus petite*
 N. 114. *que la somme des deux autres (n).*

IL faut décrire un triangle qui ait les
 Fig. 53. côtés égaux aux lignes droites A *, B & C, chacun à chacune.

N. 79. *Const.* Tirez (n) une ligne droite DF, qui soit égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D pris pour centre, & avec un rayon égal à l'une des autres lignes données, par exemple à la ligne B, décrivez un arc de cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne C, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point E. Enfin, tirez du point E aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le triangle DEF que ces lignes formeront avec la ligne DF, sera le triangle demandé.

Démonst. Dans le triangle DEF, le côté DF est égal à la ligne A [c], le côté

ED à la ligne B [C], & le côté EF à la ligne C [C]. Donc les côtés de ce triangle sont égaux aux lignes données, chacun à chacune.

Par conséquent, C. Q. F. F.

USAGE.

On peut se servir de cette proposition, pour lever le plan d'un terrain quelconque. Mais comme il y a des terrains que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut ; & d'autres au contraire dans lesquels on ne peut point entrer, cet usage a deux cas.

PREMIER CAS.

117. Lorsqu'il s'agit d'un terrain ABCDE * que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut. Fig. 14.

On suppose que le terrain proposé est divisé en triangles ABC, CAD & DAE ; & l'on mesure les côtés de ces triangles. On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrain. Enfin, on décrit (n) N. 116. des triangles abc, cad & dae, dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F, que chaque côté correspondant des triangles ABC, CAD & DAE contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer ; & la figure abcde, for-

mée par les triangles abc , cad , &c. est le plan du terrain proposé $ABCDE$.

SECOND CAS.

Fig. 35. 118. Lorsqu'il s'agit d'un terrain $ABCDE^*$ dans lequel on ne peut point entrer ; ou d'un terrain que l'on ne peut parcourir que vers les sommets de quelques-uns de ses angles.

On néglige deux angles à volonté , mais cependant pris de suite ; par exemple , les angles E & D . On fait ensuite planter des piquets , Premièrement aux points I & K pris à volonté sur les côtés BA & BC de l'angle B , que nous supposons être l'un de ceux que l'on peut parcourir : Secondement , aux points G & M pris à volonté sur les prolongemens indéfinis des côtés AE & CD des angles A & C , que nous supposons être ceux dans lesquels on ne peut point entrer : Troisièmement , aux points H & L pris aussi à volonté sur les autres côtés AB & BC des mêmes angles. Enfin , après avoir supposé des lignes droites tirées du point I au point K , du point G aux points A & H , & du point M aux points C & L ; on mesure les côtés EA , AB , BC & CD du terrain proposé , & ceux des triangles AGH , IBK & LMC .

On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du terrain proposé. On décrit (n) N. 116. un triangle agh dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F , que chaque côté correspondant du triangle AGH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés $a h$ & $g a$ de ce triangle, l'un vers b & l'autre vers e , jusqu'à ce que les lignes ab & ae contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans AB & AE du terrain contiennent de fois chacun cette mesure.

On décrit ensuite un triangle ibk , de la même manière dont on a décrit le triangle agh , en donnant à chacun de ses côtés le nombre des parties de l'échelle F , qui lui convient; & l'on prolonge vers c le côté bk , jusqu'à ce que la ligne bc contienne autant de parties de l'échelle qu'elle doit en contenir. On décrit aussi le triangle lmc de la même manière dont on a décrit les précédents; & l'on prolonge aussi son côté mc vers d , jusqu'à ce que la ligne cd contienne le nombre des parties de l'échelle qu'elle doit contenir. Enfin, du point e on tire au point d la ligne ed ; & la figure $abcde$ est le plan du terrain proposé **ABCDE**.

A l'égard de la démonstration de ces deux pratiques, elle dépend de la cinquième & de la sixième propositions du sixième Livre.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÈME.

119. *Décrire sur une ligne droite donnée, un angle qui ait pour sommet un point donné sur cette même ligne, & qui soit égal à un angle donné.*

Fig. 56. **I**L faut décrire sur la ligne droite AB^* , un angle qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle C .

Const. Tirez une ligne droite EF qui rencontre en deux points quelconques E & F , les côtés de l'angle C , prolongés s'il est nécessaire. Décrivez ensuite (n) un triangle DHG qui ait le côté DG égal † à la ligne CE , le côté DH égal à la ligne CF , & le côté GH égal à la ligne EF . L'angle HDG sera l'angle demandé.

Fig. 57. *Autre Const.* Du point C^* pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, décrivez un arc de cercle EIF , qui rencontre en deux points E & F les côtés

† Si la ligne DB étoit plus courte que la ligne CE , on la prolongeroit autant qu'il seroit nécessaire.

CE & CF de l'angle C, prolongés s'il est nécessaire. Du point D pris pour centre, & avec le même rayon précédent CE, décrivez un arc de cercle GKH, indéterminé vers H; mais qui rencontre en un point G la ligne AB prolongée s'il est nécessaire. Du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la distance du point E au point F, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point H. Enfin, tirez du point D par le point H la ligne droite indéfinie DH. L'angle HDG que cette ligne formera avec la ligne AB, fera l'angle demandé.

Pour la démonstration, tirez du point E au point F une ligne droite EF; & du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonst. Dans les triangles DHG * Fig. 56 & CFE, le côté DG est égal au côté & 57. CE [c], le côté DH au côté CF [c], & le côté GH au côté EF [c]. Donc (n), N. 88. l'angle HDG est égal à l'angle C.

Par conséquent, C. Q. F. F.

U S A G E.

120. On a donné deux constructions de ce Problème; parce que la seconde est la plus commode, lorsque l'on opere sur le papier; & que, sur le terrain, on peut se servir de la première, de la manière suivante.

Fig. 56. Après avoir déterminé sur les côtés de l'angle C^* les parties CE & CF à volonté, mais cependant d'une grandeur raisonnable, on prend sur la ligne AB prolongée s'il est nécessaire, une partie DG égale à la distance CE . On tend ensuite une corde du point E au point F , & du point F au point C ; & l'on met une marque sur cette corde au point qui y répond au point F . On attache ensuite au point G le bout de cette même corde qui étoit au point E ; & au point D , celui qui étoit au point C . Enfin, on prend cette corde par le point que l'on y a marqué: on s'avance vers H , jusqu'à ce que les deux parties de cette même corde soient également tendues; & alors le point par lequel on la tient, détermine sur le terrain le point H , duquel il faut tirer au point D la ligne droite HD , afin d'avoir l'angle HDB égal à l'angle C .



PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

121. Si de deux triangles le premier a un angle plus grand que l'un des angles du second, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun; il aura aussi le côté opposé à ce premier angle, plus grand que le côté opposé à ce second angle.

SI dans les triangles ABC * & DEF, Fig. 58. l'angle B étant plus grand que l'angle DEF, le côté BA est égal au côté ED & le côté BC au côté EF; le côté AC est aussi plus grand que le côté DF.

Const. Décrivez sur le côté ED (n), un N. 119. angle DEG qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle B. Faites (n) N. 79. la ligne EG égale au côté BC. Enfin, tirez du point G aux points D & F, les lignes droites GD & GF.

Démonst. L'angle DFG est (n) plus N. 72. grand que l'angle EFG. Or (n), l'angle N. 84. EFG est égal à l'angle EGF, puisque (n) N. 62. les côtés EG & EF du triangle FEG sont égaux; & (n) l'angle EGF est plus grand N. 72.

D

que l'angle DGF. Donc l'angle DEG est plus grand que l'angle DGF ; & par conséquent (n), dans le triangle DGF, le côté DG est plus grand que le côté DF.

N. 82. Mais (n), le côté AC est égal à ce côté DG ; puisque dans les triangles ABC & DEG, l'angle B est égal à l'angle DEG [c], le côté BA au côté ED [h], & le côté BC au côté EG [c]. Donc le côté AC est plus grand que le côté DF.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

122. *Si de deux triangles le premier a un côté plus grand que l'un des côtés du second, & les autres côtés égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun ; il aura aussi l'angle opposé à ce premier côté, plus grand que l'angle opposé à ce second côté.*

Fig. 59. **SI** dans les triangles ABC* & DEF, le côté AC étant plus grand que le côté DF, le côté BA est égal au côté ED & le côté BC au côté EF ; l'angle B est aussi plus grand que l'angle E.

Démonst. Dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal [H] au côté ED, & le côté BC au côté EF. Ainsi, si l'angle B étoit égal à l'angle E, le côté AC seroit (n) égal au côté DF ; & si N. 82. l'angle B étoit plus petit que l'angle E, le côté AC seroit (n) plus petit que le N. 111. côté DF.

Or, le côté AC n'est ni égal au côté DF, ni plus petit que le côté DF, puisque [H] il le surpasse. Donc l'angle B est plus grand que l'angle E.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

123. Si deux triangles ont un côté égal à un côté, & les angles adjacens à ce premier côté égaux aux angles adjacens à ce second côté, chacun à chacun : ils auront aussi le troisieme angle égal au troisieme angle ; les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.

Il en sera de même, si deux triangles ont un côté égal à un côté ; l'un des angles adjacens à ce premier côté, égal à l'un des angles adjacens à ce second côté ; & l'angle opposé à ce même premier côté, égal à l'angle opposé à ce même second côté.

PREMIÈREMENT. Si dans les triangles
fig. 60. ABC * & DEF, le côté AC est égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle C à l'angle F ; l'angle B est égal à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Posez par pensée le triangle

ABC sur le triangle DEF ; de manière que le point A étant sur le point D , le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le côté DE (n), puisque [H] l'angle A est N. 71. égal à l'angle D. Le point C tombera sur le point F (n), puisque [H] le côté AC N. 70. est égal au côté DF. Enfin, le côté CB tombera sur le côté FE (n), puisque [H] N. 71. l'angle C est égal à l'angle F.

Or, puisque le côté AC étant [C] sur le côté DF, le côté AB tombe sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle B est égal N. 69. à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Si dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est égal au Fig. 61. côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle B à l'angle DEF ; l'angle C est égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Prolongez le côté DE vers H, indéfiniment. Tirez du point F aux points G & I pris à volonté sur la ligne DH,

l'un au dessous du point E & l'autre au dessus, les lignes droites FG & FI. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF ; de manière que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le
 N. 71. côté DE (n), puisque [H] l'angle A est
 égal à l'angle D ; & le point C tombera
 N. 70. sur le point F (n), puisque [H] le côté
 AC est égal au côté DF. Ainsi il ne s'agit
 plus que de démontrer que le côté CB
 tombera sur le côté FE.

Or, premièrement, si le côté CB tom-
 boit au dessous du côté FE, par exemple
 sur la ligne FG, l'angle DGF seroit égal
 N. 69. à l'angle B (n). Mais [H], l'angle B est égal
 N. 62. à l'angle DEF. Donc (n), l'angle DGF,
 qui est extérieur au triangle GEF, seroit
 égal à l'angle DEF qui lui est opposé ;
 N. 102. ce qui ne peut être (n).

Secondement, si le côté CB tomboit
 au dessus du côté FE, par exemple sur la
 ligne FI, l'angle DIF seroit égal à l'angle
 N. 69. B (n). Mais [H], l'angle B est égal à l'an-
 N. 62. gle DEF. Donc (n), l'angle DIF, qui est
 intérieur au triangle EIF, seroit égal à
 l'angle extérieur DEF auquel il est op-
 N. 102. posé ; ce qui ne peut encore être (n).

Donc le côté CB tombera sur le côté
 FE.

Or, puisque le côté AC étant [C] sur le côté DF, le côté AB tombe sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle C est égal N. 69. à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

U S A G E.

On peut se servir de cette proposition, pour mesurer telle distance inaccessible que ce puisse être, pourvu que l'on en puisse voir les extrémités. Mais comme une distance inaccessible peut être accessible par l'une de ses extrémités, ou être entièrement inaccessible, ce problème a deux cas.

P R E M I E R C A S.

124. Lorsque la distance inaccessible AB * que l'on veut mesurer, est accessible Fig. 62. par l'une de ses extrémités; par exemple, par son extrémité A.

On fait planter un piquet à un point quelconque C, auquel on puisse aller directement du point A. On pose un graphometre au point A. On dirige l'une des règles de cet instrument vers le point B, & l'autre
D iv

vers le point *C* ; afin d'avoir la grandeur de l'angle *A* , formé par les rayons visuels *AB* & *AC*. On ôte ensuite le graphometre du point *A* , & l'on fait mettre un piquet à sa place. On mesure la distance du point *A* au point *C*. On fait ôter le piquet du point *C* , & l'on y place le graphometre. Enfin , on dirige l'une des regles de cet instrument au point *A* , & l'autre au point *B* ; afin d'avoir la grandeur de l'angle *C* , formé par les rayons visuels *CA* & *CB*.

On fait ensuite une échelle *G* proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle *ABC*. On tire une ligne droite *DF* qui contienne autant de parties de cette échelle , que la distance *AC* contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit † sur cette ligne un angle *D* , qui ait le point *D* pour sommet , & soit égal à l'angle *A*. On fait encore sur cette même ligne un angle *F* , qui ait le point *F* pour sommet , & soit égal à l'angle *C*. Enfin , on prolonge , s'il est nécessaire , les côtés *DE* & *FE* de ces angles , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point *E* ; & l'on a un triangle *DEF*, dont le côté *DE* contient autant de parties de

† Pour décrire ces angles sur le papier , on se sert ordinairement d'un instrument que l'on nomme un Rapporteur.

l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC; comme on le démontre par la quatrième proposition du sixième Livre.

SECOND CAS.

125. Lorsque la distance AB * que l'on Fig. 63. veut mesurer, est entièrement inaccessible.

On choisit dans la campagne deux points C & H, qui soient tels que l'on puisse aller directement de l'un à l'autre, & voir de chacun les extrémités A & B de la distance proposée. On fait mettre un piquet au point H, & un graphometre au point C. Avec cet instrument placé au point C, on prend la grandeur des angles ACH & BCH formés par les rayons visuels tirés du point C aux points A, B & H. On ôte le graphometre du point C, & l'on fait mettre un piquet à la place. On mesure la distance du point C au point H. On fait porter le graphometre à la place du piquet H. Enfin, avec cet instrument placé à ce dernier point, on prend la grandeur des angles BHC & AHC formés par les rayons visuels tirés du point H aux points B, A & C.

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du quadrilatère ABHC. On tire

une ligne droite FI , qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance CH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit sur cette ligne des angles DFI & EFI , qui aient chacun le point F pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle ACH , & l'autre à l'angle BCH . On fait encore sur cette même ligne des angles EIF & DIF , qui aient chacun le point I pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle BHC , & l'autre à l'angle AHC . On prolonge, s'il est nécessaire, les côtés de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent les uns à un point D , & les autres à un point E . Enfin, on tire du point D au point E , une ligne droite DE . Or, cette ligne contient autant de parties de l'échelle G , que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH ; comme on le démontre par les quatrième & sixième propositions du sixième Livre.

Voici les raisons des opérations que l'on vient de prescrire dans ce second cas.

Premièrement. Dans le triangle ACB , formé par la distance proposée AB , & par les rayons visuels CA & CB , on ne peut observer que l'angle ACB . Ainsi, on le mesure †,

† Dans la pratique, nous n'avons point fait observer immédiatement l'angle ACB ; parce que sa grandeur est déterminée par celle des angles ACH & BCH .

afin de construire un angle DFE de même grandeur.

Secondement. Le rayon visuel CA est une distance accessible par son extrémité C . Ainsi, conformément à ce qui a été dit dans le premier cas (n), on prend un point H ; N. 124. & l'on mesure la grandeur des angles ACH & AHC , afin de construire un triangle FDI , dont le côté FD contienne autant de parties d'une échelle G , que la distance CA contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH .

Troisièmement. Enfin le rayon visuel CB est aussi une distance accessible par son extrémité C . Ainsi, par le même principe, on prend un point H ; & l'on mesure la grandeur des angles BCH & BHC , afin de construire encore un triangle FEI , dont le côté FE contienne aussi autant de parties de cette échelle G , que la distance CB contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH .

Or, par ce moyen, on parvient à construire un triangle DFE , dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G , que le côté AB du triangle ABC , c'est-à-dire la distance proposée, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH ; comme on le démontre par la sixième proposition du sixième Livre.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

126. Si deux lignes droites étant coupées par une troisième, les angles alternes † sont égaux, ces deux lignes sont parallèles.

Fig. 64. SI les angles alternes, par exemple AEF* DFE, sont égaux, les lignes droites AB & CD sont parallèles.

Const. Prenez sur la ligne AB un point N. 81. G, à volonté. Prenez ensuite (n) sur la ligne CD, prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF, par rapport au point G, la partie FH égale à la partie EG. Enfin, tirez du point G au point F, & du point E au point H, les lignes droites GF & EH.

Démonst. Dans les triangles GEF & HFE, l'angle AEF est égal [H] à l'angle DFE, le côté EG au côté FH [C], & le N. 82. côté EF est commun. Ainsi (n), le côté GF

† On appelle *angles alternes*; deux des angles intérieurs ou deux des angles extérieurs, qui sont formés par une ligne qui en coupe deux autres; & qui sont pris l'un d'un côté de cette ligne coupante, & l'autre de l'autre côté de cette même ligne.

est égal au côté EH; & par conséquent les points G & E de la ligne AB, sont également éloignés des points F & H de la ligne CD, qui leur correspondent [c].

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point † de la ligne AB que l'on prenne le point G. Donc tous les points de la ligne AB sont également éloignés de tous les points correspondans de la ligne CD. Par conséquent (n), ces N. 55. deux lignes sont paralleles.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

127. Il suit de ce théorème, que les côtés opposés du quarré, du quarré long, du rhombe & du rhomboïde, sont paralleles.

Dans le quarré A*, le quarré long B, Fig. 67. le rhombe C, & le rhomboïde D, les côtés HG & EF sont paralleles; & les côtés HE & GF le sont aussi.

† Si l'on prenoit le point G sur la partie EB, & par conséquent le point H sur la partie CF, les angles compris par les côtés égaux des triangles de la démonstration, n'en seroient pas moins égaux; puisqu'ils seroient les supplémens des angles AEF & DFE qui sont donnés égaux. Ainsi l'on a raison de dire, que la même démonstration subsiste, à quelque point, &c.

Const. Tirez la diagonale EG de chacune de ces figures.

Démonst. Dans les triangles EHG & EFG, le côté HE est (n) égal au côté GF, le côté HG au côté EF, & le côté EG est commun. Ainsi (n), l'angle HGE est égal à l'angle FEG, & l'angle HEG à l'angle FGE.

Or, puisque les angles HGE & FEG qui sont alternes, sont égaux, les côtés HG & EF sont parallèles (n) : & puisque les angles HEG & FGE qui sont aussi alternes, sont aussi égaux, les côtés HE & GF sont aussi parallèles (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

128. Si deux lignes droites étant coupées par une troisième, l'un quelconque des angles extérieurs est égal à l'intérieur qui lui est opposé, ces deux lignes sont parallèles.

Il en est de même, si la somme de deux quelconques des angles intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, est égale à celle de deux angles droits.

PREMIÈREMENT. Si l'angle extérieur, par exemple BGE*, est égal à l'angle in-Fig. 66. térieur DHE qui lui est opposé, les lignes droites AB & CD sont parallèles.

Démonst. L'angle AGF est égal (n) à N. 101. l'angle BGE qui lui est opposé au sommet; & [H] l'angle BGE est égal à l'angle DHE. Ainsi (n), l'angle AGF est égal à N. 62. l'angle DHE.

Or (n), puisque les angles AGF & N. 126. DHE qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont parallèles.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Si la somme des deux
 Fig. 66. angles intérieurs, par exemple BGF * & DHE, est égale à celle de deux angles droits, les lignes droites AB & CD sont parallèles.

Démonst. La somme des angles AGF
 Fig. 97. & BGF est égale (n) à celle de deux angles droits; & [H] celle des angles BGF

N. 62. & DHE l'est aussi. Ainsi (n), la somme des angles AGF & BGF est égale à celle des angles BGF & DHE. Par conséquent, si l'on retranche le même angle BGF de chacune de ces deux sommes, les restes qui seront les angles AGE &
 N. 64. DHE, seront égaux (n).

N. 126. Or (n), puisque les angles AGF & DHE qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont parallèles.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE.

129. Il suit de ce théorème, que si deux lignes droites sont perpendiculaires chacune à une même ligne droite, elles sont parallèles.



PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

130. *Si deux lignes droites & parallèles sont coupées par une troisième ligne droite, les angles alternes sont égaux; chaque angle extérieur est égal à l'intérieur qui lui est opposé; & la somme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, est égale à celle de deux angles droits.*

PREMIÈREMENT. Si les lignes droites AB^* & CD sont parallèles, les angles Fig. 67. alternes, par exemple AIF & DKE , sont égaux.

Const. Prenez sur la ligne AB un point G à volonté. Prenez ensuite (n) sur la li- N. 81. gne CD , prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G , la partie KH égale à la partie IG . Enfin, tirez du point G au point K , & du point I au point H , les lignes droites GK & IH .

Démonst. Dans les triangles GIK & HKI , le côté IK est commun: le côté IG est égal $[C]$ au côté KH : & le côté

GK l'est au côté IH; puisque les points G & I, K & H, étant [C] des points correspondans des deux lignes AB & CD qui sont parallèles [H], la distance du
 N. 55. point G au point K est égale (n) à celle
 N. 88. du point I au point H. Ainsi (n), l'angle AIF est égal à l'angle DKE.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. L'angle extérieur, par exemple BIE, est égal à l'intérieur DKE qui lui est opposé.

N. 101. *Démonst.* L'angle BIE est égal (n) à l'angle AIF qui lui est opposé au sommet; & l'angle AIF est égal [D] à son alterne DKE, puisque [H] les lignes AB & CD
 N. 62. sont parallèles. Donc (n), l'angle BIE est égal à l'angle DKE.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, la somme des angles intérieurs, par exemple BIF & DKE, est égale à celle de deux angles droits.

Démonst. La somme des angles BIF &
 N. 97. BIE est égale (n) à celle de deux angles droits. Or, puisque [H] les lignes AB & CD sont parallèles, l'angle BIE qui est extérieur, est égal [D] à l'intérieur DKE

qui lui est opposé. Donc (n), la somme N. 61. des angles BIF & DKE est égale à celle de deux angles droits.

Par conséquent, C. Q. F. 3^o D.

COROLLAIRE.

131. Il suit de la première partie de ce théorème, que *si une ligne droite est perpendiculaire à l'une quelconque de deux lignes droites qui sont parallèles, elle est aussi perpendiculaire à l'autre* : & de la seconde partie de ce même théorème, que *si de deux lignes droites parallèles, l'une est perpendiculaire à une troisième ligne droite, l'autre l'est aussi*.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

132. *Si deux lignes droites sont parallèles chacune à une même ligne, elles le sont aussi entr'elles.*

SI les lignes droites AB* & CD sont Fig. 63. parallèles chacune à une même ligne EF, elles le sont aussi entr'elles.

Const. Tirez une ligne droite quelconque GH, qui coupe les lignes AB,

EF & CD, prolongées s'il est nécessaire.

N. 130. *Démonst.* L'angle AIH est égal (n) à son alterne FKG, puisque [H] les lignes AB & EF sont parallèles; l'angle FKG

N. 101. est égal (n) à l'angle EKH qui lui est opposé au sommet; enfin, l'angle EKH est

N. 130. aussi égal (n) à son alterne DLG, puisque [H] les lignes EF & CD sont aussi paral-

N. 62. leles. Donc (n), l'angle AIH est égal à l'angle DLG.

Or, puisque les angles AIH & DLG qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB

N. 126. & CD sont parallèles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÈME.

133. *D'un point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallèle à cette ligne.*

Fig. 69. **I**L faut tirer du point F* une parallèle à la ligne droite AB.

Const. Tirez du point F à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite FE. Décrivez ensuite (n) sur cette ligne FE un angle DFE, qui ayant le point F pour sommet, soit égal & alterne

N. 119.

à l'angle AEF. Le côté FD de cet angle , prolongé s'il est nécessaire , sera la parallèle demandée.

Démonst. Les angles alternes DFE & AEF sont égaux [C]. Donc (n) , les lignes AB & CFD sont parallèles. N. 126.

Par conséquent , C. Q. F. F.

USAGE.

134. On peut se servir de cette proposition , de la manière suivante , pour tirer par un point quelconque F^* une parallèle à une ligne droite inaccessible AB. Fig. 70.

On choisit sur cette ligne deux points quelconques H & G que l'on puisse reconnaître. On pose ensuite un graphometre au point F ; & après y avoir fait (n) toutes les mêmes opérations que si l'on vouloit mesurer la distance inaccessible HG , on rapporte sur le papier le triangle HFG , de la même manière dont on a rapporté en DFE le triangle ACB de la figure 63. N. 125.

Lorsque l'on est parvenu à avoir sur le papier le triangle HFG , on y prend avec un rapporteur la grandeur de l'angle HGF. On dirige ensuite l'une des règles du graphometre au point G ; & l'on fait tourner l'autre vers D , jusqu'à ce qu'elle forme avec la première un angle DFG égal à cet angle HGF. Enfin , on fait planter un piquet D

dans la direction de cette dernière règle ; & par ce moyen , on a deux points E & D de la parallèle demandée. Ainsi , si l'on fait passer par ces deux points une ligne droite CFD , elle sera cette parallèle.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

135. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même triangle , qui sont opposés à cet angle.*

Fig. 71. **L'ANGLE** extérieur BCD* du triangle ABC , est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

N. 133. *Const.* Du point C tirez (n) la parallèle CE au côté AB.

N. 72. *Démonst.* L'angle BCD est (n) la somme des angles BCE & ECD. Mais , puisque [C] les lignes AB & CE sont parallèles , ces angles BCE & ECD sont (n)

N. 130. les , ces angles BCE & ECD sont (n) égaux , l'un à son alterne B , & l'autre à

N. 62. l'intérieur A qui lui est opposé. Donc (n) , l'angle BCD est égal à la somme des angles B & A.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

136. Il suit de ce théorème, que *la somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de deux angles droits.*

Dans le triangle ABC *, la somme de tous les angles BCA, B & A est égale à celle de deux angles droits. Fig. 71.

Const. Prolongez le côté AC vers D, à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est égale (n) à celle de deux angles droits. Mais (n), l'angle BCD qui est extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés. Donc (n), la somme des angles BCA, B & A est égale à celle de deux angles droits. N. 97. N. 135. N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

137. Il suit de ce corollaire, que *si la somme de deux angles quelconques d'un triangle, est égale à celle de deux angles quelconques d'un autre triangle; le troisième angle du premier triangle est égal au troisième angle du second.*

Si dans les triangles ABC * & DEF, la somme des angles, par exemple A &

C, est égale à celle des angles, par exemple D & F; l'angle B est égal à l'angle E.

Démonst. La somme des angles A, B
 N. 62. & C, est égale (n) à celle des angles D,
 N. 136. E & F; puisque (n) elles valent chacune
 deux angles droits: & la somme des angles
 A & C est égale [H] à celles des angles
 D & F. Ainsi, si l'on retranche la
 troisième somme de la première, & la
 quatrième de la seconde, les restes seront
 N. 64 égaux (n).

Or, ces restes sont l'angle B & l'angle
 E. Donc l'angle B est égal à l'angle E.
 Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

138. Il suit aussi de ce premier corollaire, que si dans un triangle isoscele, l'angle formé par les côtés égaux est un angle droit, les autres angles sont chacun la moitié d'un angle droit.

Fig. 73. Si dans le triangle isoscele ABC * l'angle A est droit, les angles B & C sont chacun la moitié d'un angle droit.

Démonst. La somme des angles A, B
 N. 136. & C, est égale (n) à celle de deux angles
 droits. Ainsi, puisque [H] l'angle A est
 droit, les angles B & C valent ensemble
 un angle droit; & par conséquent chacun
 vaut

vaut la moitié d'un angle droit, puisque
ils sont égaux. (n) N 84.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

139. Il suit encore de ce même premier corollaire, que *dans un triangle équilatéral, chaque angle est les deux tiers d'un angle droit.*

Démonst. Dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux (n). Ainsi, ils N. 85. sont chacun le tiers de deux angles droits (n); & par conséquent, les deux tiers d'un N. 136. angle droit.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

140. Il suit enfin de ce même premier corollaire, que *la somme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, est égale à celle de deux fois autant d'angles droits, moins quatre, que cette figure a d'angles, ou de côtés.*

La somme de tous les angles A*, B, C, Fig. 74. &c. par exemple du pentagone ABCDE, est égale à celle de deux fois cinq angles droits, moins quatre; c'est-à-dire à celle de six angles droits.

Const. Du point F pris à volonté dans
E

le polygone proposé, tirez à chaque angle $A, B, C, \&c.$ les lignes droites $FA, FB, FC, FD \& FE$.

Démonst. Les lignes $FA, FB, FC, \&c.$ divisent en cinq triangles $AFB, BFC, CFD, \&c.$ le polygone proposé; puisque ce polygone a cinq côtés. Or, la somme de tous les angles de ces cinq triangles, est égale à celle de dix angles droits; puisque
 N. 136. (n), la somme de tous les angles d'un triangle est égale à celle de deux angles droits.

Mais la somme de tous les angles de ces cinq triangles, surpasse celle de tous les angles $A, B, C, \&c.$ du polygone proposé, de la somme de tous les angles dont le sommet est au point F , laquelle
 N. 98. est égale (n) à celle de quatre angles droits.

Donc, si de la somme de dix angles droits, on retranche celle de quatre angles droits, le reste qui est la somme de six angles droits, est aussi celle de tous les angles $A, B, C, \&c.$ du polygone proposé.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

141. Lorsque l'on connoît dans un triangle la valeur de deux angles quelconques,

il est facile de trouver celle du troisieme; puisque (n) cette derniere valeur est toujours N. 136. la difference de la premiere, à la somme de deux angles droits, c'est-à-dire (n), à 180 N. 38. degrés.

Ainsi, si l'on sçait que dans le triangle ABC* l'angle A est, par exemple, de 50 Fig. 75 degrés, & l'angle C de 75; on en conclut que l'angle B est de 55.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

142. Si dans un quadrilatere deux côtés sont égaux & paralleles, les deux autres le sont aussi.

SI dans le quadrilatere DB* les côtés Fig. 76. AB & DC sont égaux & paralleles, les côtés AD & BC le sont aussi.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, l'angle BAC est égal (n) à son al-N. 130. terne DCA, puisque [H] les côtés AB & DC sont paralleles; ces deux mêmes côtés sont égaux [H]; & le côté AC est commun. Ainsi (n), le côté AD est égal au N. 82. côté BC; & l'angle DAC à l'angle BCA.

E ij

Or, puisque l'angle DAC est égal à l'angle BCA qui lui est alterne, ce même côté AD que nous venons de conclure N. 126. égal au côté BC, lui est aussi parallèle (n).
Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

143. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux; les angles opposés le sont aussi; & la diagonale le divise en deux parties égales.*

PREMIÈREMENT. Dans le parallé-
Fig. 76. logramme DB* le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun; l'angle
N. 130. BAC est égal (n) à son alterne DCA,
N. 57. puisque (n) les côtés AB & DC sont pa-
N. 130. ralleles; & l'angle BCA est aussi égal (n)
N. 57. à son alterne DAC, puisque (n) les côtés
AD & BC sont aussi parallèles. Donc,
le côté AB est égal au côté DC, & le
N. 123. côté AD au côté BC (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT, l'angle DAB est égal à l'angle DCB ; & l'angle B à l'angle D.

Démonst. Les angles DAC & BAC sont égaux aux angles BCA & DCA , chacun à chacun [D]. Or, l'angle DAB est la somme des deux premiers ; & l'angle DCB est celle des deux derniers. Donc (n), N. 62. l'angle DAB est égal à l'angle DCB.

Et dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun, l'angle BAC est égal à l'angle DCA [D], & l'angle BCA à l'angle DAC [D]. Donc (n), l'angle B N. 123. est égal à l'angle D.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, la diagonale AC divise le parallélogramme DB en deux parties égales ABC & CDA.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est, &c. Donc (n) le N. 123. triangle ABC est égal au triangle CDA.

Par conséquent, C. Q. F. 3^o D.

COROLLAIRE I.

144. Il suit de la première partie de ce théorème, que *si dans un parallélogramme deux côtés de suite sont égaux, tous les côtés sont égaux.*

Si dans le parallélogramme C* les cô- Fig. 63.
tés de suite, par exemple EF & EH,

font égaux , tous les côtés HG , EF, EH & FG font égaux.

- N. 143. *Démonst.* Le côté HG est égal (n) au côté EF qui lui est opposé; le côté EF est égal [H] au côté EH; & le côté EH l'est
 N. 142. (n) au côté FG qui lui est opposé. Donc
 N. 62. tous les côtés font égaux (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

145. Il suit de la seconde partie de ce même théorème, que *si dans un parallélogramme un angle est droit, ce parallélogramme est rectangle.*

- Fig. 65. Si dans le parallélogramme B* l'angle, par exemple E, est un angle droit, ce parallélogramme est rectangle.

- Démonst.* La somme des angles E, F, G. & H est égale à celle de quatre angles
 N. 140. droits (n). Or, l'angle E est droit [H];
 N. 143. & l'angle G l'est aussi (n), puisqu'il est opposé à l'angle E. Donc la somme des deux autres angles H & F est égale à celle
 N. 143. de deux angles droits. Mais (n), ces deux autres angles font égaux, puisqu'ils sont opposés. Donc ils sont chacun un angle droit. Ainsi, tous les angles du parallélogramme B sont des angles droits. Par con-

féquent (n), ce parallélogramme est rectangle. N. 58.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

146. Il suit enfin de ces deux corollaires, que *si un parallélogramme a deux côtés de suite égaux, & un angle droit, ce parallélogramme est quarré.*

Si dans le parallélogramme A * les côtés de suite, par exemple HG & HE, sont égaux; & si l'angle, par exemple H, est un angle droit, ce parallélogramme est quarré. Fig. 65.

Démonst. Dans le parallélogramme A, tous les côtés HG, GF, HE & EF, sont égaux (n); puisque [H] les deux de suite HG & HE le sont: & tous les angles H, G, F & E sont droits (n), puisque [H] l'angle H est droit. Ainsi (n), ce parallélogramme est quarré. N. 144. N. 145. N. 50.

Par conséquent, C. Q. F. D.

On peut encore tirer plusieurs conséquences de ce même théorème, par exemple celle-ci:

Lorsque deux parallélogrammes ont un angle égal à un angle, ils sont équiangles.

Mais il est si facile & de les appercevoir & de les démontrer, qu'il est inutile d'en parler ici.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

147. *Les parallélogrammes qui sont sur une même base †, & entre les mêmes parallèles, ont des surfaces égales.*

Fig. 77. **L**ES parallélogrammes DB * & DF, qui sont sur la même base DC, & entre les mêmes parallèles DC & AF, sont égaux.

Démonst. Dans les triangles DAE & N. 143. CBF, le côté DA est égal (n) au côté CB, puisque [H] le quadrilatère DB est parallélogramme. Par la même raison, l'angle N. 130. intérieur DAE est égal (n) à l'extérieur CBF auquel il est opposé. Enfin, l'angle N. 130. extérieur DEA est aussi égal (n) à l'intérieur CFB qui lui est opposé, puisque [H] le quadrilatère DF est aussi parallélogramme. Donc (n), le triangle DAE est Fig. 123. égal au triangle CBF.

Par conséquent, si l'on retranche de chacun le même triangle GBE, les restes

† On appelle *Base* d'une figure, le côté sur lequel on suppose que cette figure est posée. Par conséquent, la *Hauteur* d'une figure, est la perpendiculaire abaissée du sommet de cette figure à sa base.

qui sont les trapezes GA & GF, seront égaux (n). Mais puisque le trapeze GA N. 64. est égal au trapeze GF, si l'on ajoute à chacun le même triangle DGC, les sommes seront égales (n).

N. 63.

Or, ces sommes seront les parallélogrammes DB & DF. Donc ces parallélogrammes sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.

S C H O L I E I.

148. Comme le mesurage des surfaces dépend primitivement de ce théorème, nous allons enseigner ce que l'on entend par Mesure ; & la maniere de se servir des mesures.

D E S M E S U R E S.

On appelle Mesure, une certaine étendue dont les hommes sont convenus entre eux, pour leur servir de terme auquel ils puissent comparer les autres étendues ; & juger de leur grandeur, par le nombre qu'elles contiendront de parties, égales chacune à cette premiere étendue. Or, comme chaque partie d'une étendue ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle, ils ont été obligés (n) de convenir de trois sortes de N. 1. mesures : savoir, de mesures linéaires, pour

leur comparer les lignes ; de mesures superficielles , pour leur comparer les surfaces ; & de mesures solides , pour leur comparer les corps.

Les premières , qui sont des lignes droites , se nomment mesures courantes ; les autres se nomment mesures quarrées , parce qu'elles sont des quarrés † ; & les dernières s'appellent mesures cubiques , parce qu'elles sont des cubes ¶.

Du Mesurage , ou de la maniere de se servir des Mesures.

On appelle mesurer , considérer combien une étendue contient de parties égales chacune à l'étendue que l'on a prise pour mesure.

Ainsi , mesurer une longueur , c'est examiner combien cette longueur contient de parties , égales chacune à la ligne droite que l'on a prise pour mesure : mesurer une surface , c'est examiner combien cette surface

† On a pris un quarré pour être la mesure des surfaces ; parce que la longueur & la largeur d'un quarré étant égales , cette figure mesure également & en même temps les deux dimensions de la surface.

¶ Le Cube est un corps qui a la figure d'un dez à jouer. On l'a pris pour être la mesure des corps ; parce que sa longueur , sa largeur & son épaisseur étant égales , il mesure également & en même temps les trois dimensions des corps.

contient de quarrés, égaux chacun à celui que l'on a pris pour mesure : enfin, mesurer un solide, c'est examiner combien ce solide contient de cubes, égaux chacun à celui que l'on a pris pour mesure. Donc :

Premièrement. Pour mesurer une ligne droite, on applique successivement sur cette ligne celle que l'on a prise pour mesure. Or, autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois elle y est contenue ; puisque cette même ligne que l'on veut mesurer, pourroit être divisée en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure peut lui être appliquée de fois.

Mais il faut observer, que si la longueur que l'on veut mesurer est une ligne courbe, il n'est point possible de lui appliquer une ligne droite. Par conséquent, on ne peut mesurer immédiatement que les seules lignes droites.

Secondement. Pour mesurer un rectangle, il faudroit lui appliquer successivement le quarré que l'on auroit pris pour mesure : & autant de fois que l'on pourroit le lui appliquer, autant de fois ce rectangle contiendrait cette mesure ; puisque l'on pourroit le diviser en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure pourroit lui être appliquée de fois. Mais il n'est

point praticable de porter facilement une surface quarrée, ni de l'appliquer successive-
ment sur toute celle d'un rectangle. Ainsi,
il faut résoudre ce problème, sans se servir
d'une surface pour mesure actuelle. Or, voici
la maniere de le faire.

Fig. 78. Soit le quarré M^* , avec lequel il faut
mesurer la surface du rectangle DB .

On prend une mesure courante, égale
au côté NO du quarré M ; & l'on considère
combien la base DC du rectangle proposé
contient de parties égales chacune à cette
mesure courante; & combien la hauteur DA
en contient aussi. Or, si la base DC con-
tient, par exemple, trois de ces parties, il
est évident que le rectangle DB pourroit être
divisé en trois autres rectangles DE , FG &
 HB , qui auroient chacun une base égale à
celle de la mesure M . Et si la hauteur DA
contient, par exemple, quatre de ces mêmes
parties, il est encore évident que chacun des
rectangles DE , FG , &c. pourroit être sub-
divisé en quatre autres, DL , IP , &c. qui
auroient aussi chacun la même hauteur que
la mesure M . Ainsi, tout le rectangle DB
pourroit être divisé en trois fois quatre, ou
douze quarrés, égaux chacun à la mesure M ;
& contient par conséquent douze parties
égales chacune à cette mesure.

Pareillement, si la mesure courante NO

se trouvoit , par exemple quatre fois $\frac{1}{2}$ dans la base d'un rectangle , & six fois $\frac{1}{3}$ dans la hauteur ; on verroit , (en tirant des parallèles aux côtés par chaque point de division) que ce rectangle contiendrait 28 parties égales chacune à la mesure M , plus une partie égale à la moitié de cette même mesure. Car ce rectangle seroit alors composé , 1^o d'un rectangle qui contiendrait 24 de ces parties ; 2^o d'un rectangle qui en contiendrait $\frac{6}{2}$, ou 3 ; 3^o d'un rectangle qui en contiendrait $\frac{3}{3}$ ou 1 ; 4^o enfin , d'un rectangle qui en contiendrait $\frac{3}{2}$ tiers , ou $\frac{1}{2}$.

D'où l'on conclut cette regle générale du mesurage des rectangles.

149. La surface d'un rectangle est égale au produit du nombre des mesures courantes qui sont contenues dans sa longueur , multiplié par le nombre des mêmes mesures qui se trouvent dans sa largeur : ou , pour nous servir de l'expression ordinaire , un rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Troisièmement. Il faut aussi observer , que si tous les angles de la surface que l'on veut mesurer ne sont pas des angles droits , il n'est pas possible de la diviser en quarrés. Par conséquent , on ne peut aussi mesurer immédiatement que les seuls rectangles.

Nous ne parlerons qu'au onzieme Livre , de la maniere de mesurer les parallélepipedes rectangles †.

COROLLAIRE I.

150. Il suit du théorème qui précède cette scholie , que *la surface d'un parallélogramme quelconque , est égale à celle d'un rectangle qui auroit pour base l'un des côtés de ce parallélogramme ; & pour hauteur , une perpendiculaire tirée de ce côté , à un point quelconque du côté qui lui est opposé , prolongé s'il est nécessaire.*

Fig. 79. Le parallélogramme DB * est égal à un rectangle qui auroit pour base , par exemple , le côté DC de ce parallélogramme ; & pour hauteur , une perpendiculaire tirée d'un point quelconque C de ce même côté , au côté opposé AB , prolongé s'il est nécessaire.

N. 96. *Const.* Du point C , abaissez (n) la perpendiculaire CF au côté AB , prolongé

N. 81. autant qu'il le sera nécessaire. Prenez (n) sur la ligne BF prolongée vers E , la partie EF égale au côté DC. Enfin , tirez du point D au point E , la ligne droite DE ¶.

† Voyez-en la définition au fixieme Livre.

¶ On se sert de cette construction , pour faire un rectangle DF égal à un parallélogramme quelconque DB.

Démonst. Le côté EF est égal [C] & parallèle [H] au côté DC. Ainsi (n), le N. 142. quadrilatère DF est un parallélogramme; & par conséquent un rectangle (n), puis- N. 145. que [C] il a un angle droit F. Or (n), le N. 147. parallélogramme DB & ce rectangle sont égaux; puisque [C] ils sont sur la même base DC, & entre les mêmes parallèles DC & EB.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

151. Il suit du corollaire précédent, & du n° 149, que *la surface d'un parallélogramme quelconque, est égale au produit de la base de ce parallélogramme multipliée par sa hauteur.*

Le parallélogramme DB * est égal au Fig. 79. produit de sa base DC multipliée par sa hauteur.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le parallélogramme DB est égal au rectangle DF (n). Or, le rectan- N. 150. gle DF est égal (n) au produit de sa base N. 149. DC multipliée par sa hauteur CF. Donc (n), le parallélogramme DB est aussi égal N. 62. au produit de la base DC multipliée par la hauteur CF.

Mais cette base DC & cette hauteur

CF sont aussi, l'une la base, & l'autre la hauteur du parallélogramme DB. Donc ce parallélogramme est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE. II.

152. Il est à propos de remarquer ici, que l'on dérive souvent du nom de la mesure, le verbe qui exprime l'action de s'en servir. Par exemple, du nom générique mesure, on dérive le verbe mesurer. Du nom générique ligne droite, (en latin *recta*,) qui est la mesure de toutes les longueurs; on dérive le verbe rectifier, qui exprime l'action de mesurer toutes sortes de lignes. Du nom générique carré, qui est celui de la mesure de toutes les surfaces; on dérive le verbe carrer, qui exprime l'action de mesurer toutes sortes de surfaces. Enfin, du nom générique cube, qui est celui de la mesure de tous les corps; on dérive le verbe cuber, qui exprime l'action de mesurer toutes sortes de solides. Ainsi, l'on dit rectifier une ligne, carrer une surface, cuber un solide; pour exprimer l'action de mesurer ces différentes étendues. C'est pareillement des noms particuliers, toise, aune, arpent, &c. que dérivent les verbes, toiser, auner, arpenter, &c.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÈME.

153. *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales , & entre les mêmes parallèles , ont des surfaces égales.*

LES parallélogrammes DB* & HF, qui Fig. 80. sont sur les bases égales DC & HG, & entre les mêmes parallèles DG & AF, sont égaux.

Const. Tirez du point D au point E, la ligne droite DE; & du point C au point F la ligne droite CF.

Démonst. Le côté DC est égal [H] au côté HG, & le côté HG au côté EF (n). N. 143. Ainsi (n), les côtés DC & EF sont égaux. N. 62. Par conséquent, puisque [H] ils sont aussi parallèles, le quadrilatere DF est parallélogramme (n). N. 142.

Or, puisque le quadrilatere DF est parallélogramme, il est égal (n) & au pa- N. 147. rallélogramme DB qui [C] est sur la même base DC que lui, & entre les mêmes parallèles DG & AF; & au parallélogramme HF qui [C] est aussi sur la même base EF que lui, & encore entre les mêmes paral-

N. 62. les DG & AF. Donc (n), les parallélogrammes DB & HF sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

154. *Les triangles qui sont sur une même base, & entre les mêmes parallèles, ont des surfaces égales.*

Fig. 81. **L**ES triangles ABC * & ADC qui sont sur la même base AC, & entre les mêmes parallèles AC & BD, sont égaux.

N. 133. *Const.* Tirez (n) du point A, la parallèle AE au côté CB; & du point C, la parallèle CF au côté AD. Prolongez ensuite la ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en des points E & F, les parallèles AE & CF.

Démonst. Les côtés AC & EB, AC & DF, sont parallèles [H], chacun à chacun; & [C] les côtés AE & CB, CF & AD, le sont aussi, chacun à chacun.

N. 57. Ainsi (n), les quadrilatères CE & AF sont parallélogrammes. Par conséquent ils sont

N. 147. égaux (n), puisque [C] ils sont sur la

même base AC , & entre les mêmes parallèles AC & EF .

Mais (n) les triangles ABC & ADC N. 143. sont les moitiés, l'un du parallélogramme CE , & l'autre du parallélogramme AF . Donc (n) ces triangles sont égaux. N. 68.

Par conséquent, $C. Q. F. D.$

U S A G E.

155. On se sert de ce théorème, de la manière suivante ; premièrement, pour faire un triangle rectangle, qui soit égal à un triangle quelconque ABC^* . Fig. 82.

Const. On tire du point B (n) une pa- N. 133. rallele indéfinie BD au côté AC . Du point A , on élève (n) la perpendiculaire AD à ce N. 95. même côté. Enfin, on tire du point D au point C , la ligne droite DC ; & l'on a un triangle ADC qui est le triangle demandé.

Démonst. Premièrement, le triangle ADC est rectangle en A [C]. Secondement, il est égal au triangle ABC (n); puisque N. 154. [C] il est sur la même base AC que cet autre triangle, & entre les mêmes parallèles AC & BD .

Donc, $C. Q. F. F.$

Secondement, pour faire un triangle qui soit égal à un autre triangle quelconque ABC^* , & compris entre les deux lignes Fig. 83 & 84. droites & parallèles AC & EF .

Const. Du point D , auquel l'un des côtés du triangle proposé (par exemple le côté AB prolongé s'il est nécessaire), rencontre la parallèle EF , tirez au sommet de l'angle C , la ligne droite DC . Du sommet N. 133. de l'angle B , tirez (n) la parallèle BG à cette ligne DC . Enfin, du point G auquel cette parallèle rencontre le côté AC prolongé s'il est nécessaire, tirez au point D la ligne droite GD . Le triangle ADG , qui [C] est entre les parallèles AC & EF , sera le triangle demandé.

Fig. 83. Démonst. 1° Les triangles ADG * & ABC ont une partie commune ABG : &

N. 154. l'autre partie BDG du premier est égale (n) à l'autre partie BCG du second : puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui [C] sont sur la même base BG , & entre

N. 63. les mêmes parallèles BG & DC . Donc (n) les triangles ADG & ABC sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. F.

Fig. 84. 2° Les triangles ADG * & ABC ont une partie commune ADC : & l'autre partie DGC

N. 154. du premier est égale (n) à l'autre partie DBC du second ; puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui [C] sont sur la même base DC , & entre les mêmes parallèles DC

N. 63. & BG . Donc (n) les triangles ADG & ABC sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

156. *Les triangles qui sont sur des bases égales, & entre les mêmes parallèles, ont des surfaces égales.*

LES triangles ABC* & DEF qui sont Fig. 85. sur les bases égales AC & DF, & entre les mêmes parallèles AF & GH, sont égaux.

Const. Tirez (n) du point A, la paral- N. 133. lele AG au côté CB; & du point F, la parallèle FH au côté DE.

Démonst. Les côtés AC & GB, DF & EH, sont parallèles [H], chacun à chacun; & [C] les côtés AG & CB, FH & DE, le sont aussi, chacun à chacun. Ainsi (n), les quadrilateres GC & DH N. 57. sont parallélogrammes. Par conséquent ils sont égaux (n), puisque [H] ils sont sur les N. 153. bases égales AC & DF, & entre les mêmes parallèles AF & GH.

Mais (n), les triangles ABC & DEF N. 143. sont les moitiés, l'un du parallélogramme GC, & l'autre du parallélogramme DH. Donc (n), ces triangles sont égaux. N. 68.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÈME.

157. *Si des triangles qui sont sur une même base, ont des surfaces égales, ils sont entre les mêmes parallèles.*

Fig. 86. SI les triangles ABC^* & ADC qui sont sur la même base AC , sont égaux, la ligne droite tirée du sommet B de l'un au sommet D de l'autre, est parallèle à cette base.

Const. Prolongez le côté AD vers E , à volonté. Tirez du point B aux points E & F pris aussi à volonté sur la ligne AE , l'un au-dessus du point D & l'autre au-dessous, les lignes droites BE & BF . Enfin, tirez du point C aux mêmes points E & F , les lignes droites CE & CF .

Démonst. Si la ligne BD n'étoit point parallèle à la base AC , une ligne tirée du point B parallèlement à cette base, passeroit ou au-dessus de la ligne BD , ou au-dessous.

Or, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne BE , les triangles
N. 154. AEC & ABC seroient égaux (n), puisque $[C]$ ils sont sur la même base AC , &

que [s] ils seroient entre les mêmes parallèles AC & BE. Mais [H], les triangles ABC & ADC sont aussi égaux. Donc (n), N. 61. le triangle AEC seroit égal au triangle ADC. Ce qui n'est point, puisque le premier surpasse le second du triangle CDE.

Et si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne BF; on démontreroit par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle AFC seroit égal au triangle ADC. Ce qui n'est point encore, puisque le premier diffère du second du triangle CFD.

Donc la ligne BD est parallèle à la base AC.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XL.

THÉORÈME.

158. *Si des triangles qui sont sur des bases égales, & prises chacune sur une même ligne droite, ont des surfaces égales; ils sont entre les mêmes parallèles.*

Fig. 87. **S**I les triangles ABC^* & DEF qui sont sur les bases égales AC & DF prises chacune sur la même ligne droite AF , sont égaux; la ligne droite tirée du sommet B de l'un au sommet E de l'autre, est parallèle à cette ligne AF .

Const. Prolongez le côté DE vers H , à volonté. Tirez du point B aux points H & G pris aussi à volonté sur la ligne DH , l'un au-dessus du point E , & l'autre au-dessous, les lignes droites BH & BG . Enfin, tirez du point F aux mêmes points précédens H & G , les lignes droites FH & FG .

La démonstration est la même que la précédente, n° 157.



PROPOSITION

PROPOSITION XLI.

THÉORÈME.

159. Si un parallélogramme & un triangle sont sur une même base, & entre les mêmes parallèles, la surface du parallélogramme est double de celle du triangle.

LE parallélogramme DB* qui est sur la même base DC que le triangle DEC, & entre les mêmes parallèles DC & AE, est double de ce triangle. Fig. 88.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Les triangles DEC & DAC sont égaux (n); puisque [H] ils sont sur la même base DC, & entre les mêmes parallèles DC & AE. Or (n), le parallélogramme DB est double du triangle DAC. N. 154.
Donc (n), il est aussi double du triangle DEC. N. 143.
DEC. N. 67.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

160. Il suit de ce théorème, & du n° 151, que la surface d'un triangle quelconque est égale au produit de la base de ce triangle, multipliée par la moitié de sa hauteur.

Fig. 89. Le triangle ABC* est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur.

Const. Abaissez du point B à la base AC, prolongée autant qu'il le fera nécessaire, la perpendiculaire BD (n). Tirez N. 96. ensuite du même point B (n), la parallèle BE à la même base AC; & du point C, la parallèle CE au côté AB.

Démonst. Le parallélogramme AE est N. 151. égal (n) au produit de sa base AC, multipliée par sa hauteur BD. Or, le triangle ABC n'est que la moitié de ce parallélogramme (n). Donc il n'est égal qu'à la N. 159. moitié de ce produit. Par conséquent, il est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur BD.

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

On déduit de ce corollaire cette règle générale du mesurage de toutes les figures planes qui ne sont terminées que par des lignes droites.

161. Divisez en triangles la figure proposée, en tirant des lignes droites de quelques-uns de ses angles à chacun de ses autres angles. Mesurez ensuite la surface N. 160. de chacun de ces triangles (n); & la

somme de toutes ces surfaces sera la surface demandée.

*Ainsi, soit, par exemple, le polygone ABCDE * qu'il faut mesurer.* Fig. 90.

*On le divisera en triangles, par exemple AED, ABD & BCD, par des lignes droites DA & DB. On choisira pour bases de ces triangles, les côtés qui paroîtront les plus commodes; c'est-à-dire, ceux qu'il ne sera pas nécessaire de prolonger pour leur abaisser des perpendiculaires, & qui sont ici les côtés DA & DB. Des angles E, B & C qui sont opposés à ces bases, on abaissera à ces mêmes bases (n) les perpendicu- N. 96.
laires Ef, Bg & Ch. On mesurera ensuite chacune de ces bases, & chacune de ces perpendiculaires. Et si la base DA contient, par exemple, 100 mesures courantes égales chacune au côté de la mesure quarrée dont on voudra se servir, la base DB 70, la perpendiculaire Ef 37, la perpendiculaire Bg 28, & la perpendiculaire Ch 23; on en conclura (n) que le triangle AED N. 160.
contient 1850 de ces mesures quarrées, le triangle ABD 1400, le triangle BCD 805; & que par conséquent le polygone ABCDE en contient 4055.*



PROPOSITION XLII.

PROBLÈME.

162. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire un parallélogramme qui
fig. 91. soit égal au triangle ABC*, & qui ait un angle égal à l'angle D.

N. 93. *Const.* Divisez (n) le côté AC en deux
N. 119. parties égales AF & FC. Faites (n) sur l'une de ces parties, par exemple sur FC, l'angle GFC qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle D. Tirez du
N. 133. point B (n) la parallèle indéfinie BE au
N. 81. côté AC. Prenez sur cette parallèle (n) la partie GE égale à la partie FC. Enfin, tirez du point C au point E la ligne droite CE. Le quadrilatère FE est le parallélogramme demandé.

Pour la démonstration, tirez du point B au point F la ligne droite BF.

Démonst. Premièrement, le côté GE est égal & parallèle au côté FC [c]. Ainsi
N. 142. (n), le quadrilatère FE est un parallélo-
N. 159. gramme. Par conséquent (n) il est double

du triangle FBC , puisque $[C]$ il est sur la même base FC que ce triangle, & entre les mêmes parallèles AC & BE . Mais le triangle ABC est aussi double du même triangle FBC ; puisque (n) les triangles $N. 136.$ ABF & FBC , qui $[C]$ sont sur les bases égales AF & FC , & entre les mêmes parallèles AC & BE , sont égaux. Donc (n) $N. 67.$ le parallélogramme FE est égal au triangle ABC .

Secondement, le même parallélogramme a l'angle GFC égal à l'angle $D[C]$.

Par conséquent, $C. Q. F. F.$

SCHOLIE.

163. Si l'on proposoit au contraire de décrire un triangle qui fût égal à un parallélogramme quelconque DB^* , & qui $Fig. 91.$ eût un angle égal à l'angle G ; on le feroit de la manière suivante.

Const. On prolongeroit indéfiniment les côtés DC & AB , l'un vers F , & l'autre vers E . On feroit sur la ligne DF (n) l'angle $N. 119.$ EDF qui auroit le point D pour sommet, & seroit égal à l'angle G . On prendroit sur cette même ligne (n) la partie CF égale $N. 81.$ au côté DC . Enfin, on tireroit du point E au point F , la ligne droite EF ; & le triangle DEF seroit le triangle demandé.

Pour la démonstration, on tireroit du

point *E* au point *C*, la ligne droite *EC* ;
 & l'on démontreroit ensuite, par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle *DEF* seroit le triangle demandé.

PROPOSITION XLIII.

THÉORÈME.

164. Les complémens d'un parallélogramme ont des surfaces égales.

Fig. 93. LES complémens *DF** & *FB* du parallélogramme *DB*, sont égaux.

Démonst. Les triangles *DAC* & *BCA* N. 143. sont égaux (n) ; & il en est de même, tant des triangles *EAF* & *GFA*, que des triangles *IFC* & *HCF*. Ainsi, si l'on retranche du triangle *DAC*, les triangles *EAF* & *IFC* ; & du triangle *BCA*, les triangles N. 64. *GFA* & *HCF*, les restes sont égaux (n). Or, ces restes sont les complémens *DF* & *FB* du parallélogramme *DB*. Donc les complémens de ce parallélogramme sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.



ROPOSITION XLIV.

PROBLÈME.

169. *Décrire sur une ligne droite donnée, un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire sur la ligne droite AB * Fig 94.
un parallélogramme qui soit égal au triangle C, & qui ait un angle égal à l'angle D.

Const. Prolongez la ligne AB vers E indéfiniment. Sur le prolongement BE pris aussi grand qu'il le sera nécessaire, décrivez (n) un triangle BFE, dont les côtés N. 116. soient égaux à ceux du triangle C, chacun à chacun. Faites (n) un parallélogramme N. 162. BH qui soit égal au triangle BFE, & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. Prolongez indéfiniment vers K, vers L & vers N, les côtés HG, HI & GB. Faites (n) le N. 79. prolongement GK égal à la ligne AB. Du point K tirez par le point B la ligne KL; & par le point A, la ligne indéfinie KM. Enfin (n), tirez par le point L la parallèle N. 133. LM à la ligne KH. Le quadrilatere MB sera le parallélogramme demandé.

Fiv

Démonst. Le quadrilatere MH est parallélogramme [C] ; ainsi , les parallélogrammes MB & BH qui en sont les com-
 N. 164. plémens , sont égaux (n). Mais le parallélogramme BH est égal au triangle BFE [c], & le triangle BFE l'est [c] au triangle C. Donc , le parallélogramme MB est égal
 N. 62. au triangle (n). Enfin , l'angle ABN
 N. 101. est égal (n) à l'angle GBE qui lui est opposé au sommet ; & l'angle GBE est égal à l'angle D [c].

Donc , C. Q. F. F.

SCHOLIE.

166. Si l'on proposoit au contraire , de
 Fig. 94. *décrire sur une ligne droite AB * un triangle qui fût égal à un parallélogramme donné , & qui eût un angle égal à l'angle D , on le feroit de la manière suivante.*

Sur le prolongement de la ligne AB , on décrirait un parallélogramme BH , qui soit double du parallélogramme proposé ; & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. On achèveroit ensuite le parallélogramme MH , de même que dans le problème précédent. Enfin , on tireroit la diagonale AN ; & l'on auroit un triangle ABN , qui seroit le triangle demandé.

Pour la démonstration , revoyez la précédente.

PROPOSITION XLV.

PROBLÈME.

167. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

IL faut décrire un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne BD^* , & qui ait un angle égal à l'angle E . Fig. 95.

Const. Divisez en triangles, par exemple ABC & ACD , la figure proposée BD . Décrivez ensuite (n) un parallélogramme IG , qui soit égal à celui de ces triangles qu'il vous plaira, par exemple au triangle ABC ; & qui ait un angle, par exemple l'angle I , égal à l'angle E . Faites enfin (n) sur l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple sur le côté HG , un autre parallélogramme HK qui soit égal au triangle ACD ; & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I . La figure rectiligne IK , formée par ces deux parallélogrammes, sera le parallélogramme demandé. N. 162.

Démonst. Puisque le quadrilatère IG est parallélogramme $[C]$, la somme des angles GHI & I est égale à celle de deux

- N. 130. angles droits (n). Mais [C] l'angle GHL
 N. 61. est égal à l'angle I . Donc (n), la somme
 des angles GHI & GHL est aussi égale à
 celle de deux angles droits ; & par consé-
 N. 100. quent (n) les lignes droites IH & HL , qui
 [C] sont tirées du même point H de la
 droite GH , ne font qu'une seule ligne
 droite IHL .

- Pareillement, puisque le quadrilatere
 HK est parallélogramme [C], la somme
 des angles HGK & GHL est égale à celle
 N. 130. de deux angles droits (n). Mais [C], l'an-
 gle GHL est égal à l'angle I , & l'angle I
 N. 143. l'est à l'angle HGF (n). Donc la somme
 des angles HGK & HGF est aussi égale
 N. 62. à celle de deux angles droits (n). Par
 N. 100. conséquent (n), les lignes droites FG &
 GK , qui [C] sont tirées du même point G
 de la droite GH , ne font qu'une seule
 ligne droite FGK .

- Ainsi, la figure rectiligne IK est un qua-
 drilatere. Par conséquent un parallélo-
 N. 57. gramme (n), puisque [C & D] ses côtés
 IHL & FGK sont parallèles, & que
 ses côtés IF & LK , qui [C] sont parallèles
 chacun à la même HG , sont aussi paral-
 N. 132. leles entr'eux. (n) Or, *premièrement*, ce pa-
 N. 72. rallélogramme est égal (n) à la figure rec-
 tiligne BD ; puisque [C] les parties IG &
 HK de l'un sont égales aux parties ABC &

ACD de l'autre, chacune à chacune. *Secondement*, il a l'angle I égal à l'angle E [c].

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

168. Si la figure rectiligne BD^* avoit Fig. 95. plus de quatre côtés, & qu'il fallût la diviser, par exemple, en trois triangles.

Alors, après avoir décrit un parallélogramme IK égal aux deux premiers triangles ABC & ACD, de la maniere dont ce problème enseigne à le faire; on décriroit sur le côté LK de ce parallélogramme, un parallélogramme égal au troisieme triangle, de la même maniere dont on a décrit sur le côté HG le parallélogramme HK égal au triangle ACD. Et ainsi de suite, si la figure proposée se divisoit en un plus grand nombre de triangles.

169. Mais si l'on proposoit de faire un parallélogramme qui fût égal à plusieurs figures rectilignes; par exemple, aux deux figures A^* & B.

Fig. 96.

On commenceroit par en construire un FL (n) qui soit égal à la figure A. En-N. 167. suite, sur l'un des côtés de ce parallélogramme FL, par exemple sur le côté ML, on en construiroit un autre MD (n), qui N. 167.

soit égal à sa figure B ; & l'on auroit un parallélogramme FD , égal aux deux figures A & B .

Enfin , s'il s'agissoit d'augmenter encore le parallélogramme FD , d'une figure rectiligne quelconque KH , on construiroit (n) sur l'un des côtés FE ou ED du parallélogramme FD , un parallélogramme qui soit égal à cette figure KH ; & ainsi de suite.

PROPOSITION XLVI.

PROBLÈME.

170. *Décrire un quarré sur une ligne droite donnée.*

IL faut décrire un quarré sur la ligne droite AB *.

Fig. 97. N. 95. *Const.* Du point A , élevez (n) la perpendiculaire AD à la ligne AB . Du point N. 95. B , élevez encore (n) la perpendiculaire BC à la même ligne. Faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB . Enfin, tirez du point D au point C , la ligne droite DC . Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec la ligne AB , fera le quarré demandé.

Démonst. Les côtés AD & BC sont

égaux [C] ; & paralleles (n), puisque [C]^{N. 129.} ils sont perpendiculaires chacun à la même ligne droite AB. Ainsi (n), le quadrilatre^{N. 142.} AC est parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A est droit (n),^{N. 21.} & les côtés de suite AB & AD sont égaux [C]. Donc (n) ce parallélogramme est^{N. 46.} quarré.

Par conséquent, C. Q. F. F.

Autre Const. † Du Point A*, élevez la^{Fig. 98.} perpendiculaire AD à la ligne AB (n). Fai-^{N. 95.} tes cette perpendiculaire égale à cette ligne AB. Des points D & B pris pour centres, & avec encore cette même ligne AB prise pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en un point C. Enfin tirez du point C aux points D & B, les lignes droites CD & CB. Le quadrilatre AC que ces lignes formeront avec les précédentes AB & AD, fera le quarré demandé.

Démonst. Tous les côtés du quadrilatre AC sont égaux [C]. Ainsi (n), ce^{N. 55.} quadrilatre est parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A est

† Nous donnons ces deux constructions, parce que la première est la plus commode sur le terrain, & la seconde sur le papier. A l'égard de la maniere d'élever sur le terrain une perpendiculaire à une ligne droite quelconque, voyez le n° 177.

N. 21. droit (n). Donc ce parallélogramme est
N. 146. quarré (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XLVII.

THÉORÈME.

171. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.*

Fig. 99. **D**ANS le triangle ABC* qui est rectangle en B, le quarré AD de l'hypothénuse AC est égal à la somme des quarrés AG & CH des deux autres côtés AB & BC.

N. 133. *Const.* Du sommet de l'angle droit B, tirez (n) la parallele BL au côté AE. Du même point B, tirez aux points E & D, les lignes droites BE & BD. Enfin, tirez du point F au point C la ligne droite FC, & du point A au point I, la ligne droite AI.

Démonst. Dans les triangles ABE & AFC, l'angle BAE est égal à l'angle FAC N. 63. (n); puisque le premier est la somme de l'angle BAC, & de l'angle CAE qui est N. 50. un angle droit (n); & que le second est celle du même angle BAC, & de l'angle

BAF qui est aussi un angle droit (n) : le N. 50.
 côté AE est égal au côté AC (n) ; puis- N. 50.
 que [H] l'un & l'autre sont côtés du même
 carré AD : enfin, le côté AB est égal
 au côté AF (n) ; puisque [H] l'un & l'autre N. 50.
 sont aussi côtés du même carré AG.
 Donc, ces deux triangles sont égaux (n). N. 82.

Mais (n), le premier est la moitié de N. 159.
 la partie AL du carré AD ; puisque [C]
 il est sur la même base AE, & entre les
 mêmes parallèles AE & BL que cette par-
 tie, qui est un parallélogramme [C] : &
 le second est aussi la moitié du carré AG
 (n) ; puisque [C] il est aussi sur la même N. 159.
 base AF que ce même carré, & entre les
 mêmes parallèles AF & CG. Donc, la
 partie AL est égale au carré AG (n). N. 67.

Or, on démontre de la même manière,
 que les triangles CBD & CIA sont égaux ;
 que le premier est la moitié de l'autre par-
 tie LC du carré AD ; & que le second
 est la moitié du carré CH. Par consé-
 quent (n), cette autre partie LC est égale N. 67.
 au carré CH. Donc, le carré AD qui
 est la somme de ces deux parties AL
 & LC, est égal à la somme des carrés
 AG & CH.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

172. Il suit de ce théorème, que de plusieurs lignes droites qui sont tirées d'un même point à une même ligne droite ; celles qui sont plus éloignées de la perpendiculaire, sont plus grandes que celles qui en sont moins éloignées.

Fig. 101. La ligne droite CF^* qui est plus éloignée de la perpendiculaire CD que la ligne droite CE , est plus grande que cette dernière ligne.

Démonst. Dans le triangle FCD qui [H] est rectangle en D , le carré de l'hypothénuse CF est égal (n) à la somme des carrés des côtés CD & DF : & dans le triangle ECD , qui [H] est aussi rectangle en D , le carré de l'hypothénuse CE est
 N. 171. égal (n) à la somme des carrés des côtés CD & DE .

Or, cette première somme est plus grande que la dernière ; puisque [H] le côté DF est plus grand que le côté DE . Donc, le carré de l'hypothénuse CF est plus grand que celui de l'hypothénuse CE . Par conséquent, la ligne CF est plus grande que la ligne CE .

Donc, C. Q. F. D.

USAGE I.

173. On se sert ordinairement de cette proposition, pour résoudre le problème suivant.

On donne les côtés A^* & B de deux Fig. 100.
quarrés; & l'on propose de faire un quarré
qui soit égal à la somme de ces deux
quarrés.

Solution. Tirez une ligne droite ED
égale à l'une des lignes données, par exem-
ple à la ligne A . Du point D , élevez (n) N. 95.
la perpendiculaire DC à cette ligne ED .
Faites cette perpendiculaire égale à l'autre
ligne donnée B . Enfin, tirez du point C au
point E la ligne droite CE . Cette ligne
sera le côté du quarré demandé.

Démonst. Le triangle ECD est rectangle
en D [C]. Ainsi (n), le quarré de l'hypo- N. 171.
thénuse CE est égal à la somme des quarrés
des côtés ED & DC . Mais [C], ces côtés
sont égaux aux lignes A & B , chacun à
chacune. Donc, le quarré de l'hypothénuse
 CE est égal à la somme des quarrés des li-
gnes A & B .

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

174. Il suit de la solution du problème

précédent : premièrement , que pour faire un quarré qui soit double de celui de la ligne A^* , il faut faire la perpendiculaire DC égale à la ligne ED . Secondement , que pour faire un quarré qui soit triple de celui de la même ligne A , il faut commencer par trouver le côté d'un quarré double , & faire ensuite la perpendiculaire DC égale à ce côté. Et ainsi de suite.

USAGE II.

175. On se sert aussi de cette proposition pour résoudre cet autre problème.

Fig. 102 La longueur d'une échelle AB^* est de 10 pieds ; & cette échelle étant posée droite contre un mur D , elle est de même hauteur que ce mur. Si, en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne son pied de celui de ce même mur, de 6 pieds ; de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainsi inclinée, ne soit égale à celle de ce mur ?

Solution. La longueur AB de l'échelle , sa hauteur AC , & la distance BC de son pied B au pied C du mur , forment un triangle ACB qui est rectangle en C . Ainsi
 N. 171. (n) , le quarré de la distance BC , (qui [H] est de 36 pieds) avec celui de la hauteur AC (qui est inconnu), doit être égal au quarré de la longueur AB , (qui [H] est de

100 pieds.) Mais, puisque 36 pieds, avec le quarré qui est inconnu, doit faire 100 pieds, ce quarré inconnu doit être de 64 pieds. Par conséquent, son côté AC est de 8 pieds. Or, puisque la hauteur AC de l'échelle est de 8 pieds, & que [H] la hauteur EC du mur est de 10 pieds, il s'en faut de 2 pieds que la hauteur de l'échelle ne soit égale à celle du mur.

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XLVIII.

THÉORÈME.

176. Si dans un triangle le quarré de l'un des côtés est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, ce triangle est rectangle.

Fig. 103 SI dans le triangle ABC *, le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés BC & BA, ce triangle est rectangle.

N. 95. *Const.* De l'une quelconque des extrémités des côtés BA & BC, par exemple, de l'extrémité C du côté BC, élevez (n) la perpendiculaire CD à ce côté. Faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté BA. Enfin, tirez du point B au point D, la ligne droite BD.

N. 171. *Démonst.* Le quarré du côté AC est égal [H] à la somme des quarrés des côtés BC & BA; & par conséquent, à celle des quarrés des côtés BC & CD, puisque [C] les côtés BA & CD sont égaux. Mais (n), le quarré du côté BD est aussi égal à la somme des quarrés de ces mêmes côtés BC & CD; puisque [C] le triangle BCD

est rectangle en C. Donc (n), le quarré N. 62. du côté AC est égal à celui du côté BD. Par conséquent, ces côtés sont égaux.

Ainsi, les triangles ABC & BCD ont le côté BA égal au côté CD [c], le côté AC égal au côté BD [d], & le côté BC est commun. Donc (n), l'angle ABC est égal N. 88. à l'angle BCD. Par conséquent, puisque l'angle BCD est droit [c], l'angle ABC l'est aussi.

Donc, C. Q. F. D.

U S A G E.

177. On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour élever sur le terrain une perpendiculaire à une ligne droite quelconque BC*.

Fig. 103

Après avoir pris pour mesure une longueur quelconque, mais cependant d'une grandeur raisonnable, on marque sur la ligne BC un point E, qui soit éloigné du point C de quatre fois cette mesure. On compte ensuite sur une corde, premièrement trois parties, ensuite cinq parties, égales chacune à cette même mesure; & l'on y met une marque au point qui est compris entre les trois premieres parties & les cinq autres. On attache les deux bouts de cette corde, l'un au point C, & l'autre au point E. Enfin, on prend cette corde par le point

que l'on y a marqué : on s'avance vers D , jusqu'à ce que les deux parties de cette même corde soient également tendues. Et alors le point par lequel on la tient, détermine sur le terrain le point D , duquel, si l'on tire au point C la ligne droite DC , cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Démonst. Dans le triangle ECD , le quarré 25 du côté ED , est égal [c] à la somme des quarrés 16 & 9 des deux autres N. 176. côtés EC & CD . Donc (n), l'angle BCD est droit.

Par conséquent, C. Q. F. F.





LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

QUOIQUE ce Livre ne contienne que quatorze propositions, il est cependant très-considérable ; puisque c'est par les principes qui y sont établis que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on résoud les problèmes qui en dépendent. Il est vrai qu'on peut le faire d'une manière plus courte, par le moyen de l'algebre ; mais les démonstrations que l'on tirera de ce second Livre seront toujours les plus satisfaisantes, parce qu'elles seront toujours les plus lumineuses. A l'égard de l'ordre, Euclide considère dans les premières propositions les différens rectangles que l'on peut former des

parties d'une même ligne droite différemment divisée, & détermine de combien les uns différent des autres. Il enseigne ensuite à diviser une ligne droite, suivant de certaines conditions; ce qui fait un problème dont l'usage est assez fréquent dans la Géométrie. Il démontre aussi de combien le quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, surpasse la somme des quarrés des deux autres côtés; & de combien celui du côté opposé à un angle aigu, differe de cette somme. Enfin, il termine ce Livre par donner la maniere de faire un quarré qui soit égal à une figure rectiligne quelconque.

D É F I N I T I O N S.

178. **O**N dit, le rectangle fait de telles lignes, ou seulement, le rectangle de telles lignes, pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle, dont l'une de ces lignes seroit la longueur, & l'autre la largeur.

Par exemple, on dit, le rectangle des
Fig. 1. lignes AB * & BC, pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle AC dont la ligne AB est la longueur, & la ligne BC la largeur.

179. On dit de même, le quarré fait sur telle ligne, ou seulement, le quarré de telle ligne, pour exprimer la surface du quarré dont cette ligne est le côté.

Par exemple, on dit, le quarré de la ligne AB^* , pour exprimer la surface du quarré AC dont cette ligne est le côté. Fig. 3.

AVERTISSEMENT.

180. Premièrement, ce Livre, qui au premier coup d'œil semble avoir quelque difficulté, deviendra fort aisé, si, avant que de lire la démonstration de chaque proposition, on veut se donner la peine d'en faire soi-même la construction, telle qu'elle y est enseignée.

Secondement, lorsque l'on dira d'un quadrilatere qu'il est rectangle $[C]$, cela signifiera: 1^o que ses côtés opposés sont parallèles $[C]$; & que par conséquent, il est parallélogramme: 2^o qu'il a un angle droit $[C]$; & que par conséquent, il est rectangle (n) .

N. 145.



PROPOSITION I.

THÉORÈME.

181. Si de deux lignes droites, l'une est divisée en plusieurs parties; le rectangle de ces deux lignes est égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée, & de chaque partie de celle qui est divisée.

Fig. 5. **L**E rectangle des lignes droites AB* & AD, (dont l'une AB est divisée, par exemple en trois parties quelconques AE, EF & FB,) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la ligne AD & de la partie AE; l'autre de la même ligne AD & de la partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites le rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD l'autre. Par chaque point de division N. 133. E & F, tirez (n) les paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes EG & FH sont N. 143. égales chacune à la ligne AD (n). Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont rectangles[C], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AD & de la partie AE;

l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF ; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatère AC, qui est le rectangle des lignes AB & AD [c]. Donc (n), le rectangle AC des lignes AB & AD N. 72. est égal à la somme des rectangles faits de la ligne AD, & de chaque partie AE, EF & FB de la ligne AB.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

182. *Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties ; le quarré de cette ligne est égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.*

LE quarré de la ligne droite AB*, qui Fig. 6. est divisée, par exemple en trois parties quelconques AE, EF & FB, est égal à la somme des rectangles faits, l'un de cette ligne AB & de sa partie AE ; l'autre, de cette même ligne AB & de sa partie EF ; & le dernier, encore de cette même ligne AB & de sa partie FB.

G ij

- N. 170. *Const.* Décrivez (n) le quarré AC sur la ligne AB. Par chaque point de division E & F, tirez (n) les paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes AD, EG & FH N. 61. sont égales chacune à la ligne AB (n), N. 143. puisque (n) les lignes EG & FH le sont chacune à la ligne AD, qui est égale à cette ligne AB [C]. Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont rectangles [C], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AB & de sa partie AE; l'autre, de la même ligne AB & de sa partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AB & de sa partie FB.

Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [C] est le N. 72. quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré AC de la ligne AB est égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne AB, & de chacune de ses parties AE, EF & FB.

Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Cette proposition ne differe de la premiere, qu'en ce que dans la premiere, les lignes AB & AD sont inégales; & que dans celle-ci, elles sont égales. Ainsi, elle n'est qu'un corollaire de cette premiere.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

183. Si une ligne droite est divisée en deux parties ; le rectangle de ces deux parties , avec le quarré de l'une quelconque de ces deux mêmes parties , est égal au rectangle de cette ligne & de cette dernière partie.

Si une ligne droite AB* est divisée en deux parties quelconques AE & EB; le rectangle de ces deux parties , avec le quarré de l'une de ces parties , par exemple de la partie AE , est égal au rectangle de la ligne AB & de cette même partie AE. Fig. 7.

Const. Faites le rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés , & dont l'autre côté soit une ligne AD , égale à la partie AE. Par le point de division E , tirez (n) la parallele EF à la ligne AD. N. 133.

Démonst. Le quadrilatere AF est rectangle [C]. Ainsi (n) , il est le quarré de la partie AE , puisque son côté AD est égal à cette partie [C]. N. 146.

Le quadrilatere EC est aussi rectangle [C]. Ainsi , il est le rectangle des parties

AE & EB, puisque son côté EF est égal
N. 50. à la partie AE (n).

Or, ce quarré & ce rectangle sont
toutes les parties du quadrilatere AC, qui
[C] est le rectangle de la ligne AB & de
N. 72. la partie AE. Donc (n), le rectangle EC
des parties AE & EB, avec le quarré AF
de la partie AE, est égal au rectangle AC
de la ligne AB & de cette partie AE.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

184. *Si une ligne droite est divisée en deux parties ; les quarrés de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux au quarré de cette ligne.*

Fig. 8. **S**I une ligne droite AB*, est divisée en deux parties quelconques AE & EB ; les quarrés de ces deux parties AE & EB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux au quarré de cette ligne AB.

N. 170. *Const.* Décrivez (n) le quarré DB sur la ligne AB. Tirez la diagonale AC. Par

le point de division E, tirez (n) la paral- N. 133.
lele EF à la ligne AD. Enfin, par le point
G auquel cette parallele rencontre la dia-
gonale AC, tirez (n) la parallele HI à la N. 133.
ligne AB.

Démonst. Premièrement, l'angle exté-
rieur EGA est égal à son opposé intérieur
BCA (n), puisque les lignes EF & BC N. 136
sont paralleles [C]. Or, l'angle BAC est
aussi égal au même angle BCA (n), puis- N. 84.
que les côtés BC & BA du triangle ABC
sont égaux (n). Donc, l'angle EGA est N. 50.
égal à l'angle BAC (n); & par consé- N. 62.
quent, les côtés AE & EG du triangle
AEG sont égaux (n). Mais, ces côtés AE N. 86.
& EG sont aussi ceux du quadrilatere HE.
Donc, puisque ce quadrilatere est rec-
tangle [C], il est quarré (n); & par con- N. 146.
séquent, il est le quarré de la partie AE,
puisque cette partie est un de ses côtés.

Secondement, l'angle extérieur IGC
est égal à son opposé intérieur BAC (n), N. 136.
puisque les lignes HI & AB sont paralle-
les [C]. Or [D], l'angle BCA est aussi égal
au même angle BAC. Donc, les angles
IGC & BCA sont égaux (n). Par consé- N. 62.
quent, les côtés IC & IG du triangle
GIC le sont aussi (n). Mais, ces côtés N. 86.
IC & IG sont aussi ceux du quadrilatere
FI. Donc, puisque ce quadrilatere est

N. 146. rectangle [C], il est quarré (n). Par conséquent, il est le quarré de la partie EB, puisque cette partie est égale au côté IG
 N. 143. (n).

Troisièmement, le côté EG est égal à
 N. 50. la partie AE (n). Ainsi, puisque le quadrilatere GB est rectangle [C], il est le rectangle des parties AE & EB.

Quatrièmement, enfin, le côté HG est
 N. 50. égal à la partie AE (n); & le côté GF
 N. 62. l'est à la partie EB (n), puisque la même
 N. 50. ligne IG est égale, & à ce côté (n), &
 N. 143. à cette partie (n). Ainsi, puisque le quadrilatere DG est aussi rectangle [C], il est encore un rectangle des parties AE & EB.

Or, ces deux quarrés HE & FI, avec ces deux rectangles GB & DG, sont toutes les parties du quadrilatere DB, qui [C] est le quarré de la ligne AB. Donc
 N. 72. (n), les quarrés HE & FI des parties AE & EB, avec les deux rectangles GB & DG, faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux au quarré DB de la ligne AB.
 Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

185. Il suit de ce théorème, que le quarré d'une ligne est quadruple de celui de la moitié de cette même ligne.

Le quarré de la ligne AB* est quadruplé de celui de la moitié de cette ligne. Fig. 9.

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AC & CB. N. 93.

Démonst. Puisque les parties AC & CB sont égales [C], le quarré de la première, celui de la seconde, & le rectangle fait de la première & de la seconde, sont trois choses égales. Or (n), le quarré de la ligne AB est égal au quarré de cette même première partie, à celui de cette même seconde partie, & à deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties. Donc, il est égal à quatre fois le quarré de cette première partie. N. 184.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

186. Il suit aussi de la démonstration de ce même théorème, qu'un parallélogramme qui a un angle de commun avec un quarré, & dont la diagonale est une partie de celle de ce quarré, est un quarré.

Le parallélogramme, par exemple HE*, qui a l'angle A de commun avec le quarré DB, & dont la diagonale AG est une partie de la diagonale AC de ce même quarré, est un quarré. Fig. 8.

Démonst. Par quelque point de la diagonale AC que l'on tire une parallèle EF

au côté BC, l'angle EGA est toujours
 N. 130. égal à l'angle BCA (n); & par consé-
 N. 84. quent à l'angle BAC (n), puisque les côtés
 BA & BC sont toujours égaux [H]. Ainsi,
 le parallélogramme HE a toujours deux
 N. 86. côtés de suite AE & EG égaux (n):
 N. 50. d'ailleurs, il est toujours rectangle (n);
 puisque [H] il a toujours un angle de com-
 mun avec le carré DB. Donc, il est
 N. 146. toujours carré (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

187. *Si une ligne droite est divisée en deux parties; le rectangle de ces deux parties, avec le carré de la moitié de leur différence, est égal au carré de la moitié de cette ligne.*

Fig. 10. **S**I une ligne droite AB* est divisée en deux parties quelconques AE & EB; le rectangle de ces deux parties AE & EB, avec le carré de la moitié de leur différence, est égal au carré de la moitié de cette ligne AB.

N. 93. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux
 N. 170. parties égales AK & KB. Décrivez (n)

le quarré KC sur la partie KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E, tirez (n) la parallele EF à la ligne KD. N. 137. Par le point G, auquel cette parallele rencontre la diagonale DB, tirez (n) la parallele HL à la ligne AB. Enfin, par le point A, tirez (n) la parallele AH à la ligne KD. N. 138.

Démonst. [C] les quadrilateres AI & KL sont parallélogrammes, ils ont des bases égales AK & KB, & ils sont entre les mêmes paralleles AB & HL; ainsi ils sont égaux (n). Mais, les quadrilateres KL & EC sont aussi égaux; puisqu'ils ont une partie commune EL, & que l'autre partie KG du premier est égale à l'autre partie GC du second (n). Donc, les quadrilateres AI & EC sont égaux (n). Par conséquent, si l'on ajoute à l'un & à l'autre les quadrilateres KG & IF, la premiere somme, c'est-à-dire les quadrilateres AI, KG & IF, est égale (n) à celle des quadrilateres EC, KG & IF. Or les quadrilateres AG & IF sont égaux à cette premiere somme, & la seconde fait toutes les parties du quarré KC. Donc, les quadrilateres AG & IF sont égaux au quarré KC (n). N. 147. N. 164. N. 62. N. 63.

Mais le premier de ces deux quadrilateres est rectangle [C], la partie AE de la

ligne AB est l'un de ses côtés, & son autre côté EG est égal à l'autre partie EB de
 N. 186. cette même ligne (n). Ainsi, il est le rectangle des parties AE & EB de la ligne AB.

N. 186. Et le second IF est quarré (n), son côté
 N. 143. IG est égal à la partie KE (n), & cette partie est la demi-différence † des parties AE & EB de la ligne AB. Ainsi, il est le quarré de la demi-différence de ces deux parties.

Donc, le rectangle AG des parties AE & EB de la ligne AB, avec le quarré IF de la demi-différence KE de ces mêmes parties, est égal au quarré KC, qui est celui de la moitié KB de cette même ligne AB (c).

Par conséquent, C. Q. F. D.

Fig. 10. † Lorsqu'une ligne droite quelconque AB est divisée en deux parties inégales AE & EB, la partie KE qui est comprise entre son milieu K & son point de division E, est toujours la moitié de la différence de ces parties inégales.

Car, si sur la plus grande partie AE on prend une partie AM égale à la plus petite EB, le reste ME est la différence de ces deux parties AE & EB. Or, les parties AK & KB sont égales, puisque [H] le point K est le milieu de la ligne AB; & les parties AM & EB sont aussi égales [C]. Donc, la partie MK est égale à la partie KE; & par conséquent, cette partie KE est la moitié de la différence ME.

188. On peut se servir de cette proposition, de la manière suivante, pour résoudre ce problème.

Un rectangle AC^* a 112 pieds de surface, & 44 pieds de circonférence. Combien sa longueur AB , & sa largeur BC , contiennent-elles de pieds chacune ? Fig. 11.

SOLUTION. Puisque $[H]$ le rectangle AC a 44 pieds de circonférence, sa longueur AB & sa largeur BC ont ensemble 22 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 22 pieds, dont la moitié FE n'est par conséquent que de 11 pieds ; après quoi, l'on raisonne de cette manière :

La ligne ABE est divisée en deux parties AB & BE , & le point F est son milieu. Ainsi (n) , le rectangle AC de ces deux parties (qui $[H]$ est de 112 pieds), avec le quarré de leur demi-différence FB (qui est inconnu,) doit être égal au quarré de la ligne FE , (lequel est de 121 pieds $[H]$). Donc, ce quarré qui étoit inconnu est de 9 pieds ; & par conséquent, la demi-différence FB est de 3 pieds. Or, puisque la ligne AF est de 11 pieds, & la demi-différence FB de 3, le côté AB est de 14 pieds, & le côté BC de 8.

Par conséquent, $C. Q. F. F.$

S C H O L I E.

189. La surface d'un rectangle , considérée comme une quantité discrete , n'est autre
 N. 149. chose (n) que le produit des deux nombres qui expriment les valeurs des côtés de ce rectangle. Ainsi , l'on auroit pu énoncer de cette maniere le problème précédent :

Le produit de deux nombres est 112 ; & leur somme 22 ; quels sont ces deux nombres ?

Et pour le résoudre , on auroit dit , par le même principe que dans l'usage précédent : le produit 112 des deux nombres demandés , avec le quarré de leur demi-différence , doit être égal au quarré 121 de la moitié de leur somme. Donc , le quarré de leur demi-différence est 9 ; & par conséquent , leur demi-différence est 3. Or , puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est 11 , & que leur demi-différence est 3 , le plus grand de ces deux nombres est 14 , & le plus petit est 8.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition , toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la somme.



PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

190. Si une ligne droite est divisée en deux parties ; le rectangle de cette ligne & de l'une quelconque de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de l'autre partie, est égal au quarré d'une ligne composée de cette première partie, & de la moitié de cette autre partie.

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties quelconques AE & EB ; le rectangle de cette ligne AB & de sa partie, par exemple EB, avec le quarré de la moitié de l'autre partie AE, est égal au quarré d'une ligne composée de cette première partie EB, & de la moitié de cette autre partie AE. Fig. 120.

Const. Divisez (n) la partie AE en deux parties égales AK & KE. Décrivez (n) le quarré KC sur la ligne KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E, tirez (n) la parallèle EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette parallèle rencontre la diagonale DB, tirez (n) la parallèle HL à la ligne AB. Enfin, par le N. 93.
N. 170.
N. 133.
N. 133.

N. 133. point A, tirez (n) la parallele AH à la ligne KD.

Démonst. [C] Les quadrilateres AI & KG sont parallélogrammes, ils ont des bases égales AK & KE, & ils sont entre les mêmes paralleles AB & HL; ainsi ils sont égaux

N. 147. (n). Mais, les quadrilateres KG & GC

N. 164. le sont aussi (n). Donc, le quadrilater

N. 62. AI est égal au quadrilater GC (n).

Par conséquent, si l'on ajoute à l'un & à l'autre les quadrilateres KL & IF, la premiere somme, c'est-à-dire les quadri-
N. 63. lateres AI, KL & IF, est égale (n) à celle des quadrilateres GC, KL, & IF. Or, les quadrilateres AL & IF sont égaux à cette premiere somme, & la seconde fait
N. 72. toutes les parties du quarré KC. Donc (n), les quadrilateres AL & IF sont égaux au quarré KC.

Mais, le premier de ces deux quadri-
lateres est rectangle [C], la ligne AB est l'un de ses côtés, & son autre côté BL est égal à la partie EB de cette même li-
N. 186. gne (n). Ainsi, il est le rectangle de la ligne AB & de sa partie EB.

N. 186. Et le second IF est quarré (n), son côté

N. 143. IG est égal à la partie KE (n), & cette partie est la moitié de l'autre partie AE de la ligne AB [C]. Ainsi il est le quarré de la moitié de cette autre partie.

Donc , le rectangle AL de la ligne AB & de sa partie EB , avec le quarré IF de la moitié KE de l'autre partie AE de cette même ligne , est égal au quarré KC de la ligne KB , laquelle est composée de cette premiere partie EB , & de la moitié KE de cette autre partie AE.

Par conséquent , C. Q. F. D.

SCHOLIE.

191. La ligne KE* est la moitié de la différence AE des lignes AB & EB. Ainsi, la ligne KB est la moitié de leur somme ; & par conséquent , ce théorème & le précédent ne sont qu'une même proposition , que l'on auroit pu énoncer de cette manière : le rectangle de deux lignes droites quelconques , avec le quarré de la moitié de leur différence , est égal au quarré de la moitié de leur somme.

C'est la parité de ces deux théorèmes qui fait que leurs démonstrations sont presque les mêmes.

USAGE.

192. On peut se servir de cette proposition , de la manière suivante , pour résoudre ce problème.

Un rectangle AC * a 216 pieds de surface , & sa longueur AB surpasse de 6 pieds

Fig. 12.

Fig. 13.

sa largeur BC . Combien cette longueur & cette largeur contiennent-elles de pieds chacune ?

SOLUTION. Puisque $[H]$ le côté AB surpasse de 6 pieds le côté BC , on prend sur ce côté AB une partie AE de 6 pieds, & le reste EB est égal au côté BC ; après quoi, l'on raisonne de cette manière :

N. 190. La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB . Ainsi (n) , le rectangle AC de cette ligne & de la partie EB , (lequel est de 216 pieds $[H]$), avec le quarré de la moitié FE de la partie AE , (lequel est de 9 pieds $[C]$), doit être égal au quarré de la ligne FB . Donc, le quarré de la ligne FB est de 225 pieds; & par conséquent, cette ligne est de 15 pieds. Or, puisque la ligne FB est de 15 pieds, & que $[C]$ la ligne AF est de 3 pieds, le côté AB est de 18 pieds, & le côté BC de 12.

Par conséquent, $C. Q. F. F.$

SCHOLIE.

193. Par la même raison que dans la N. 189. dernière scholie (n) , on auroit pu énoncer de cette manière le problème précédent :

Le produit de deux nombres est 216; & leur différence 6; quels sont ces deux nombres ?

Et pour le résoudre, on auroit dit, par

le même principe que dans l'usage précédent : le produit 216 des deux nombres demandés, avec le quarré 9 de leur demi-différence, doit être égal au quarré de la moitié de leur somme. Donc, ce quarré est 225 ; & par conséquent, cette demi-somme est 15. Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est 15, & que leur demi-différence est 3, le plus grand de ces deux nombres est 18, & le plus petit 12.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la différence.



PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

194. *Si une ligne droite est divisée en deux parties ; le quarré de l'une quelconque de ces deux parties , avec deux rectangles faits chacun de cette ligne & de son autre partie , est égal au quarré de cette même ligne , plus celui de cette autre partie.*

Fig. 14. **S**I une ligne droite AB * est divisée en deux parties quelconques AE & EB , le quarré de la partie , par exemple EB, avec deux rectangles faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE, est égal au quarré de cette même ligne AB , plus celui de cette autre partie AE.

N. 170. *Const.* Décrivez (n) le quarré AC sur la ligne AB. Tirez la diagonale DB. Par

N. 133. le point de division E, tirez (n) la parallèle EF à la ligne AD. Prolongez les lignes AD & EF, jusqu'à ce que leurs prolongemens AK & EL soient égaux chacun à la partie AE. Tirez du point K au point L, la ligne droite KL. Enfin, par le point G, auquel la parallèle LF rencontre la diagonale DB, tirez (n) la parallèle HI à la ligne AB.

Démonst. Le quadrilatere HC est rectangle [C]; son côté HI est égal à la ligne AB (n): & son autre côté IC est égal à la partie N. 143. AE de cette même ligne (n); puisque N. 64. les lignes BC & BA sont égales, & que leurs parties BI & BE le sont aussi (n). N. 50. Ainsi, ce quadrilatere est un rectangle de la ligne AB & de sa partie AE.

Mais, le quadrilatere HL est aussi rectangle [C]; son côté HG est égal à la partie AE de la ligne AB (n): & son autre N. 143. côté LG est égal à cette même ligne, puisque les parties EL & EG de l'un sont égales aux parties EA & EB de l'autre, chacune à chacune (n). Donc, cet autre N. 50. quadrilatere est encore un rectangle de cette même ligne AB & de cette même partie AE.

Or, ce carré EI, qui est celui de la partie EB de la ligne AB (n), & ces deux N. 186. rectangles HC & HL faits chacun de cette même ligne AB & de son autre partie AE, sont toutes les parties du carré AC de cette ligne, & du carré AL de sa partie AE. Donc, ils sont égaux à ces deux carrés (n). N. 72.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

195. On peut se servir de cette proposi-

tion , de la maniere suivante , pour résoudre ce problème.

Fig. 15. Un rectangle DB^* a 432 pieds de surface , & 30 pieds de diagonale. Combien sa longueur AB & sa largeur BC contiennent-elles de pieds chacune ?

SOLUTION. On tire la diagonale AC . On suppose ensuite le plus grand côté AB divisé en deux parties , dont l'une EB soit égale au plus petit côté BC ; après quoi , l'on raisonne de cette maniere :

N. 194. La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB . Ainsi (n) , le quarré de la partie AE (qui est inconnu) avec deux rectangles DB & DB faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie EB (lesquels pris ensemble , valent 864 pieds $[H]$,) doit être égal au quarré de cette ligne AB & de cette autre partie EB ; c'est-à-dire aux quarrés des côtés AB & BC ; & par conséquent , au quarré de l'hypothénuse AC

N. 171. (n) , puisque le triangle ABC est rectangle en B $[H]$. Mais $[H]$, ce quarré est de 900 pieds. Donc , celui de la partie AE qui étoit inconnu , n'est que de 36 pieds ; & par conséquent , cette partie est de 6 pieds. Or , puisque la partie AE est de 6 pieds , la longueur AB du rectangle DB , qui a 432

N. 192. pieds de surface , surpasse de 6 pieds sa largeur BC . Donc (n) , cette longueur AB est

de 24 pieds , & cette largeur BC est de 18.
Par conséquent , $C. Q. F. F.$

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

196. Si une ligne droite est divisée en deux parties ; quatre rectangles faits chacun de ces deux parties , avec le carré de la différence de ces deux mêmes parties , sont égaux au carré de cette ligne.

SI une ligne droite AB^* est divisée en deux parties quelconques AC & CB ; quatre rectangles de ces deux parties , avec le carré de la différence de ces deux mêmes parties , sont égaux au carré de cette ligne AB . Fig. 16.

Démonst. La ligne AB est divisée en deux parties AC & CB . - Ainsi (n) , le rectangle de ces deux parties , avec le carré de la moitié de leur différence , est égal au carré de la moitié de cette ligne. Donc (n) , quatre rectangles de ces deux parties , avec quatre carrés de cette demi-différence , (c'est-à-dire (n) , avec le carré de la différence entière ,) sont égaux à quatre carrés de la moitié

de cette ligne ; & par conséquent , au
N. 18, quarré de cette ligne entiere (n).

Donc , C. Q. F. D.

SCHOLIE.

197. Cette proposition n'est qu'un corollaire de la cinquieme.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

198. Si une ligne droite est divisée en deux parties ; les quarrés de ces deux parties sont doubles du quarré de la moitié de cette ligne , & du quarré de la moitié de la différence de ces mêmes parties.

Fig. 17. SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties quelconques AC & CB ; les quarrés de ces parties AC & CB sont doubles du quarré de la moitié de cette ligne AB , & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties AC & CB.

N. 93. Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AD & DB. Du point D ,

N. 95. élevez (n) la perpendiculaire DE à cette ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale

égale à l'une des parties AD & DB. Tirez du point E aux points A & B, les lignes droites EA & EB. Par le point de division C, tirez (n) la parallèle CF à la ligne DE. N. 133. Par le point F auquel cette parallèle rencontre la ligne EB, tirez (n) la parallèle N. 133. GF à la ligne AB. Enfin, tirez du même point F au point A, la ligne droite FA.

Démonst. Premièrement. Le triangle AED est rectangle & isoscele [C]; ainsi, les angles DAE & DEA sont chacun la moitié d'un angle droit (n). Or, il en est N. 138. de même des angles DBE & DEB du triangle BDE, puisque ce second triangle est égal au premier (n). Donc, l'angle N. 82. AEB est un angle droit; & par conséquent, le triangle AEF est rectangle en E.

Secondement. Les lignes GF & AB qui sont coupées par la ligne EB, sont parallèles [C]; ainsi, l'angle extérieur GFE est égal à l'intérieur DBE (n). Or, les lignes N. 130. CF & DE qui sont aussi coupées par la même ligne EB, sont aussi parallèles [C]; ainsi, l'angle extérieur CFB est aussi égal à l'intérieur DEB (n). Donc, les angles N. 130. GFE & CFB sont aussi chacun la moitié d'un angle droit. Par conséquent, les triangles EGF & FCB sont aussi rectangles, l'un en G & l'autre en C (n); les N. 136. côtés GF & GE du premier sont égaux;

& les côtés CB & CF du second le font
N. 86. aussi (n).

Troisièmement. Le triangle ADE est rectangle & isoscele [C]; ainsi, le carré du côté AE est double de celui du côté
N. 171. AD (n) : & puisque le triangle EGF est aussi rectangle & isoscele [D], le carré du côté EF est aussi double de celui du
N. 171. côté GF (n) ; & par conséquent, de celui
N. 143. de la partie DC (n).

Or, les carrés des parties AC & CB de la ligne AB, sont égaux à ceux des côtés AC & CF du triangle ACF, puisque la partie CB est égale au côté CF [D] : les carrés des côtés AC & CF sont égaux
N. 171. au carré du côté AF (n), puisque le triangle ACF est rectangle en C [D] : le carré du côté AF est égal aux carrés
N. 171. des côtés AE & EF du triangle AEF (n), puisque ce triangle est aussi rectangle en E [D]. Enfin, le carré du côté AE est double de celui du côté AD [D] ; & le carré du côté EF est double de celui de la
N. 62. partie DC. Donc (n), les carrés des parties AC & CB de la ligne AB, sont égaux au double du carré du côté AD, plus le double du carré de la partie DC. Par conséquent, ces deux premiers carrés ensemble, sont doubles de ces deux derniers ensemble.

Mais, le côté AD est la moitié de la ligne AB [c]; & la partie DC est la demi-différence † des parties AC & CB de cette même ligne. Donc, les quarrés des parties AC & CB de la ligne AB sont doubles du quarré de la moitié AD de cette ligne, & du quarré de la demi-différence DC des parties AC & CB de cette même ligne.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

199. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problème.*

Un rectangle DB^* a 70 pieds de cir-Fig. 18.conférence, & 25 pieds de diagonale. Combien sa longueur AB & sa largeur BC , contiennent-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. Puisque [H] le rectangle DB a 70 pieds de circonférence, sa longueur AB & sa largeur BC , ont ensemble 35 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 35 pieds, dont la moitié AF est par conséquent de $17\frac{1}{2}$ pieds; & après avoir tiré la diagonale AC , on raisonne de cette maniere :

La ligne AE est divisée en deux parties

† Voyez la note du n° 187.

AB & BE, & le point F est son milieu.

N. 198. *Ainsi (n), le quarré de la ligne AF, (lequel est de $306\frac{1}{4}$ pieds [H]), avec celui de la demi-différence FB, (qui est inconnu), doit être égal à la moitié de la somme des quarrés des parties AB & BE; c'est-à-dire à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC; & par conséquent, à la moitié du quarré de la diagonale AC*

N. 171. *(n), puisque [H] le triangle ABC est rectangle en B. Mais, la moitié de ce quarré est de $312\frac{1}{2}$ pieds [H]. Donc, le quarré qui étoit inconnu est de $6\frac{1}{4}$ pieds: & par conséquent, la demi-différence FB est de $2\frac{1}{2}$ pieds. Or, puisque la ligne AF est de $17\frac{1}{2}$ pieds, & la demi-différence FB de $2\frac{1}{2}$ pieds, le côté AB est de 20 pieds, & le côté BC de 15.*

Par conséquent, C, Q, F, F.



PROPOSITION X.

THÉORÈME.

200. *Si une ligne droite est divisée en deux parties ; le quarré de cette ligne , avec celui de l'une quelconque de ces deux parties , est double du quarré de la moitié de l'autre partie , & du quarré d'une ligne composée de cette premiere partie & de la moitié de cette autre partie.*

SI une ligne droite AB * est divisée en Fig. 19.
deux parties quelconques AC & CB , le
quarré de cette ligne AB , avec celui de
la partie , par exemple CB , est double du
quarré de la moitié de l'autre partie AC ,
& du quarré d'une ligne composée de
cette premiere partie CB & de la moitié
de cette autre partie AC.

Const. Divisez (n) la partie AC en deux N. 93.
parties égales AD & DC. Du point D ,
élevez (n) la perpendiculaire DE à la li- N. 95.
gne AB. Faites cette perpendiculaire égale
à l'une des parties AD & DC. Par le
point E , tirez (n) la parallele indéfinie N. 133.
EF à la ligne AB. Du même point E ,
tirez par le point de division C , la ligne

droite indéfinie EG. Par le point B, tirez
 N. 133. (n) une ligne GF parallèle à la perpendiculaire DE; & qui rencontre les lignes EF & EG, l'une à un point F, & l'autre à un point G. Enfin, tirez du point A aux points E & G, les lignes droites AE & AG.

Démonst. Premièrement. Le triangle ADE est rectangle & isoscele [c]; ainsi, les angles DAE & DEA sont chacun la
 N. 138. moitié d'un angle droit (n). Or, il en est de même des angles DCE & DEC du triangle CDE, puisque ce second triangle
 N. 82. est égal au premier (n). Donc, l'angle AEC est un angle droit; & par conséquent, le triangle AEG est rectangle en E.

Secondement. Les lignes EF & AB qui sont coupées par la ligne EG, sont parallèles [c]; ainsi, l'angle FEG est égal à
 N. 130. son alterne DCE (n). Or, les lignes GF & DE qui sont aussi coupées par la même ligne EG, sont aussi parallèles [c]; ainsi, l'angle FGE est aussi égal à son alterne
 N. 130. DEC (n). Enfin, les angles BCG & DCE qui sont opposés au sommet, sont aussi
 N. 101. égaux (n). Donc, les angles FEG, FGE & CBG, sont aussi chacun la moitié d'un angle droit. Par conséquent, les triangles EFG & CBG sont aussi rectangles, l'un
 N. 136. en F & l'autre en B (n); les côtés EF &

FG du premier sont égaux; & les côtés CB & BG du second le sont aussi (n). N. 86.

Troisièmement. Le triangle ADE est rectangle & isoscele [C]; ainsi, le carré du côté AE est double de celui du côté AD. (n): & puisque le triangle EFG est aussi rectangle & isoscele [D], le carré du côté EG est aussi double de celui du côté EF (n); & par conséquent, de celui de la ligne DB (n). N. 171.

Or, le carré de la ligne AB, avec celui de sa partie CB, est égal aux carrés des côtés AB & BG du triangle ABG; puisque la partie CB est égale au côté BG [D]: les carrés des côtés AB & BG sont égaux au carré du côté AG (n), N. 171. puisque le triangle ABG est rectangle en B [D]: le carré du côté AG est égal aux carrés des côtés AE & EG du triangle AEG (n), puisque ce triangle est aussi rectangle en E [D]: enfin [D], le carré du côté AE est double de celui du côté AD; & le carré du côté EG est double de celui de la ligne DB. Donc (n), le carré de la ligne AB avec celui de sa partie CB, est égal au double du carré du côté AD, plus le double du carré de la ligne DB. Par conséquent, ces deux premiers carrés ensemble, sont doubles de ces deux derniers ensemble. N. 62.

Mais, le côté AD est la moitié de la partie AC de la ligne $AB[C]$; & la ligne DB est composée de la première partie CB de cette même ligne AB & de la moitié DC de son autre partie AC . Donc, le carré de la ligne AB , avec celui de sa partie CB , est double du carré de la moitié AD de l'autre partie AC de cette ligne, & du carré de la ligne DB , laquelle est composée de cette première partie CB , & de la moitié DC de cette autre partie AC .

Par conséquent, $C. Q. F. D.$

SCHOLIE.

Fig. 19. 201. La ligne DC^* est la moitié de la différence AC des lignes AB & CB , comme nous l'avons déjà observé au n° 191. Ainsi, la ligne DB est la moitié de leur somme; & par conséquent, ce théorème & le précédent ne sont aussi qu'une même proposition, que l'on auroit pu énoncer de cette manière:

Les carrés de deux lignes droites quelconques sont doubles de ceux de la moitié de la somme de ces deux lignes, & de la moitié de la différence de ces mêmes lignes.

C'est aussi la parité de ces deux théorèmes qui est la cause de celle de leurs démonstrations.

USAGE.

202. On peut se servir de cette proposition, de la manière suivante, pour résoudre ce problème.

Un rectangle DB* a 35 pieds de dia-Fig. 20.
gonale, & sa longueur AB surpasse de sept
pieds sa largeur BC. Combien cette lon-
gueur & cette largeur ont-elles de pieds,
chacune ?

SOLUTION. Puisque [H] le côté AB surpasse de 7 pieds le côté BC, on prend sur le côté AB une partie AE de 7 pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette manière:

La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB. Ainsi (n), le carré de la N. 200, moitié AF de la partie AE, (lequel est de $12\frac{1}{4}$ pieds [C]), avec celui de la ligne FB, (qui est inconnu), doit être égal à la moitié de la somme des carrés de la ligne AB & de la partie EB; c'est-à-dire [C], à la moitié de la somme des carrés des côtés AB & BC; & par conséquent, à la moitié du carré de la diagonale AC (n), N. 171, puisque le triangle ABC est rectangle en B [H]. Mais [H], la moitié de ce carré est de $612\frac{1}{2}$ pieds: donc, le carré qui étoit inconnu, est de $600\frac{1}{4}$ pieds; & par conséquent, la ligne FB est de $24\frac{1}{2}$ pieds. Or,

H v

puisque cette ligne est de $24\frac{1}{2}$ pieds, & que la ligne AF est de $3\frac{1}{2}$ pieds, le côté AB est de 28 pieds, & le côté BC de 21.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

203. Diviser une ligne droite en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au carré de la plus grande.

Fig. 21. IL faut diviser la ligne droite AB^* en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au carré de la plus grande.

N. 95. Const. Du point A , élevez (n) à la ligne AB une perpendiculaire indéfinie.

N. 81. FD. Prenez (n) sur cette perpendiculaire, la partie AE égale à la moitié de cette ligne AB ; & la partie EF égale à la distance du point E au point B . Enfin, pre-

N. 81. nez (n) sur la ligne AB , la partie AH égale à la ligne AF . Cette ligne AB sera divisée comme il est demandé.

Pour la démonstration, faites la partie

AD égale à la ligne AB ; & achevez le quarré AC (n). Par le point H , tirez la N. 170.
 parallele GI à la ligne FD (n) ; & par le N. 133.
 point F, la parallele FG à la ligne AB.
 Enfin, tirez du point E au point B la ligne droite EB.

Démonst. La ligne DF est l'un des côtés du rectangle DG ; & son autre côté FG est égal à la partie AF de cette même ligne , puisque le quadrilatere AG est le quarré de la partie AH [C]. Donc , ce rectangle est celui de la ligne DF & de sa partie AF.

Ainsi , puisque la ligne EA est la moitié de l'autre partie DA de cette même ligne DF [C], le rectangle DG , avec le quarré de la ligne EA , est égal au quarré de la ligne EF (n) ; & par conséquent , N. 190.
 à celui de la ligne EB , puisque les lignes EF & EB sont égales [C]. Mais le quarré AC de la ligne AB , avec celui de la ligne EA , est aussi égal au quarré de cette même ligne EB - (n) , puisque le triangle N. 171.
 EAB est rectangle en A [C]. Donc (n), N. 62.
 le rectangle DG , avec le quarré de la ligne EA , est égal au quarré AC de la ligne AB , plus celui de la ligne EA. Par conséquent , le rectangle DG est égal au quarré AC (n).

Or , puisque ce rectangle & ce quarré ,

qui ont la partie DH de commun, sont égaux, l'autre partie AG du premier est égale à l'autre partie HC du second; c'est-à-dire, au rectangle de la ligne AB & de sa partie HB.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

204. *Dans un triangle obtusangle, le carré du côté opposé à l'angle obtus, est égal aux carrés des deux autres côtés, plus deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire.*

Fig. 12. **D**ANS le triangle ABC* dont l'angle C est obtus; le carré du côté AB est égal aux carrés des autres côtés AC & CB, plus deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire; par exemple, du côté AC & de son prolongement CD.

N. 96. *Const.* Du point B, abaissez (n) la perpendiculaire BD au côté AC, prolongé autant qu'il le fera nécessaire.

Démonst. La ligne AD est divisée en deux parties AC & CD. Ainsi (n), les N. 184. carrés de ces deux parties AC & CD, avec deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, sont égaux au carré de cette ligne AD.

Donc (n), les carrés de ces deux parties, avec les deux rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, & le carré de la perpendiculaire BD, sont égaux au carré de la ligne AD, plus celui de la même perpendiculaire BD. N. 63.

Mais, à cause des triangles CDB & ADB, qui sont rectangles l'un & l'autre en D [C], le carré de la partie CD, avec celui de la perpendiculaire BD, est égal au carré du côté CB (n) : & le N. 171. carré de la ligne AD, avec celui de la même perpendiculaire BD, est égal au carré du côté AB (n). N. 171.

Donc, le carré du côté AB est égal aux carrés des côtés AC & CB, plus deux rectangles faits chacun du côté AC & de son prolongement CD.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

205. On peut se servir de cette proposition, de la manière suivante, pour résoudre ce problème.

Fig. 22. Les côtés AB^* , AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est obtus, sont, l'un de 20 toises, l'autre de 11, & le dernier de 13. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle?

SOLUTION. L'angle C est obtus [H].
 N. 204. Ainsi (n), les quarrés des côtés AC & CB , (qui sont de 290 toises [H]), avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD , (lesquels sont inconnus), doivent être égaux au quarré du côté AB , (lequel est de 400 toises [H]). Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus sont de 110 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 55. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & CD est de 55 toises, & que la ligne AC est de 11 toises [H], 55 sont le produit
 N. 149. de la ligne CD multipliée par 11 (n); & par conséquent cette ligne est de 5 toises. Or, puisque dans le triangle CDB qui est rectangle en D [H], on connoît l'hypothénuse CB de 13 toises, avec le côté CD de 5, on
 N. 175. trouvera (n) que le côté BD , qui est la perpendiculaire demandée, en contient 12.
 Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

206. *Dans un triangle quelconque, le carré du côté opposé à l'un des angles aigus, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés & de la partie de cet autre côté comprise entre cet angle aigu & la perpendiculaire, est égal aux carrés des deux autres côtés.*

DANS le triangle ABC *, le carré du Fig. 23.
côté, par exemple AB, opposé à l'angle
aigu C, avec deux rectangles faits chacun,
par exemple du côté AC, & de la partie
DC de ce côté comprise entre cet angle
aigu C & la perpendiculaire BD, est
égal aux carrés des deux autres côtés AC
& CB.

Const. Du point B, abaissez (n) la per- N. 96.
pendiculaire BD au côté AC.

Démonst. La ligne AC est divisée en
deux parties AD & DC. Ainsi (n), le N. 194.
carré de la partie AD, avec deux rec-
tangles faits chacun de cette ligne AC &
de son autre partie DC, est égal au carré
de cette même ligne AC, plus celui de
cette autre partie DC.

N. 63. Donc (n), le quarré de la partie AD, avec deux rectangles faits chacun de la ligne AC & de la partie DC, & le quarré de la perpendiculaire BD, est égal aux quarrés de la ligne AC, de la partie DC, & de la perpendiculaire BD.

Mais, à cause des triangles ADB & CDB, qui sont rectangles l'un & l'autre en D [C], le quarré de la partie AD, avec celui de la perpendiculaire BD, est
 N. 171. égal au quarré du côté AB (n) : & le quarré de la partie DC, avec celui de la même perpendiculaire BD, est égal au
 N. 171. quarré du côté CB (n).

Donc, le quarré du côté AB, avec deux rectangles faits chacun du côté AC & de sa partie DC, est égal aux quarrés des côtés AC & CB.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

207. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problème.*

Fig. 23. Les côtés AB *, AC & CB du triangle ABC, dont l'angle C est aigu, sont, l'un de 45 toises ; l'autre, de 42 ; & le dernier, de 39. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté

opposé, (par exemple, de l'angle B au côté AC), en contient-elle ?

SOLUTION. L'angle C est aigu [H].
 Ainsi (n), le quarré du côté AB, (qui est ^{N. 206.} de 2025 toises [H]), avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, (lesquels sont inconnus), doit être égal aux quarrés des côtés AC & CB, (qui sont de 3285 toises [H]. Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus, sont de 1260 toises ; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 630. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & DC est de 630 toises, & que la ligne AC est de 42 toises [H], 630 sont le produit de la ligne DC multipliée par 42 (n) ; & par conséquent, ^{N. 149.} cette ligne est de 15 toises. Or, puisque dans le triangle DBC qui [H] est rectangle en D, on connoît l'hypothénuse CB de 39 toises, avec le côté DC de 15, on trouvera (n) que le côté BD, qui est la per- ^{N. 175.}pendiculaire demandée, en contient 36.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

208. Cette proposition & la précédente peuvent être fort utiles dans le toisé, & dans l'arpentage ; parce qu'il est bien plus facile, dans la pratique, de mesurer les

trois côtés d'un triangle , que d'abaisser une perpendiculaire de l'un des angles à l'un des côtés.

PROPOSITION XIV.

PROBLÈME.

209. *Décrire un quarré , dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.*

IL faut décrire un quarré qui soit égal à la figure rectiligne A*.

N. 167. *Const.* Décrivez (n) un rectangle BD égal à la figure proposée A. Prolongez l'un des côtés de ce rectangle , par exemple le côté BC , jusqu'à ce que le prolongement CF soit égal à l'autre côté CD.

N. 93. Divisez (n) la ligne BF en deux parties égales BG & GF. Du point G pris pour centre , & avec l'une de ces parties égales prise pour rayon , décrivez un demi-cercle BHF. Enfin , prolongez le côté CD , jusqu'à ce qu'il rencontre à un point H la circonférence de ce demi-cercle. Le prolongement CH fera le côté du quarré demandé.

Pour la démonstration , tirez du point G au point H , la ligne droite GH.

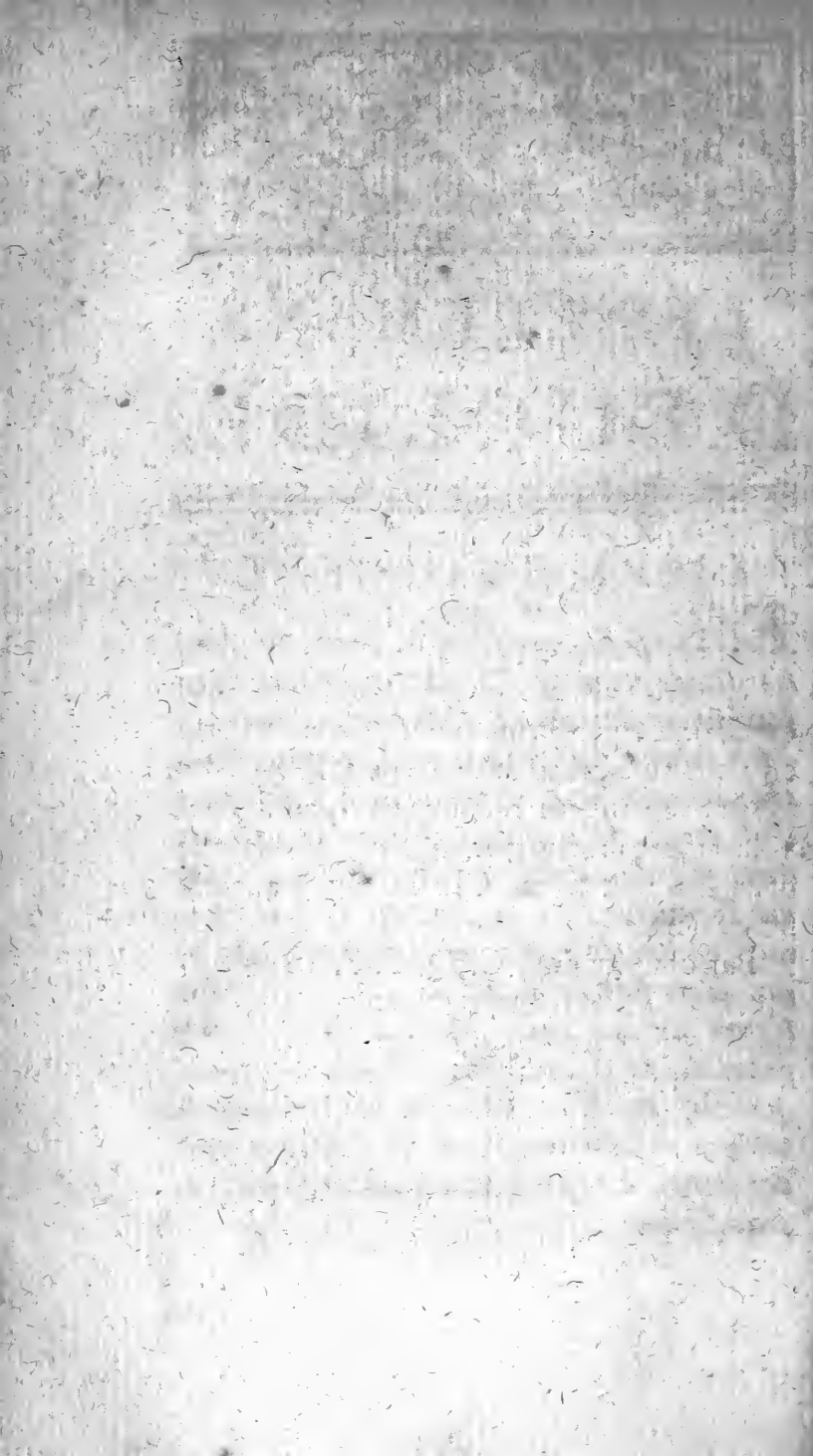
Démonst. La ligne BF est divisée en deux parties BC & CF, & le point G est son milieu [C]. Ainsi (n), le rectangle de N. 187. ces deux parties, (c'est-à-dire le rectangle BD, puisque les lignes CF & CD sont égales [C]), avec le carré de la ligne GC, est égal au carré de la ligne GF; & par conséquent, à celui de la ligne GH, puisque les lignes GF & GH sont égales (n). N. 35.

Mais, les carrés des lignes GC & CH sont aussi égaux au carré de la même ligne GH (n); puisque le triangle GCH N. 171. est rectangle en C [C]. Donc (n), le N. 62. rectangle BD, avec le carré de la ligne GC, est égal aux carrés des lignes GC & CH; & par conséquent, ce rectangle est égal au carré de la ligne CH (n). N. 64.

Or, ce même rectangle est aussi égal à la figure rectiligne A [C]. Donc, le carré de la ligne CH est égal à cette figure (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. F.








LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIEME.

***E**UCLIDE, après avoir démontré dans les deux premiers Livres les propositions fondamentales de la Géométrie, examine dans celui-ci les propriétés des lignes droites qui vont se terminer à la circonférence d'un cercle. Il considère ensuite la manière dont les circonférences des cercles peuvent ou se toucher, ou se couper. Il détermine aussi ce qui doit être la mesure des angles qui sont formés dans un cercle, par des lignes droites tirées chacune d'un même point de sa circonférence. Enfin, il résoud quelques problèmes qui concernent encore le cercle; & démontre dans les dernières propositions, les propriétés caractéristiques de cette figure,*

D É F I N I T I O N S.

210.  N nomme *cercles égaux*, ceux dont les diametres, ou dont les rayons, sont égaux.

211. On dit qu'une ligne droite *touche* une figure, lorsqu'elle à un point de commun avec la circonférence de cette figure; & qu'étant prolongée de part & d'autre, elle ne peut avoir que ce seul point de commun avec cette même figure.

Fig. 1. *La ligne AB* touche le cercle X.*

212. On nomme *Tangente*, une ligne droite qui touche une figure.

Fig. 1. *La ligne AB* est une tangente au cercle X.*

213. On nomme *Sécante*, une ligne droite qui, étant prolongée, s'il est nécessaire, a plus d'un point de commun avec la circonférence d'une figure.

Fig. 1. *La ligne CD* est une sécante du cercle X.*

214. On dit que des figures se *touchent*, lorsque leurs circonférences ont un point

de commun, & ne peuvent avoir que ce seul point de commun.

215. On dit que des lignes droites sont *également éloignées* d'un certain point, lorsque les perpendiculaires qui sont tirées de ce point à chacune de ces lignes, sont égales.

Les lignes AB^ & CD sont également éloignées du centre K du cercle X , si les perpendiculaires KG & KH sont égales.* Fig. 2.

216. On nomme *Corde*, une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémités d'un arc de cercle à l'autre extrémité du même arc.

La ligne AC^ est la corde de l'arc ABC .* Fig. 3.

217. On dit d'une corde, qu'elle *tend* l'arc dont elle est la corde.

La corde AC^ tend l'arc ABC .* Fig. 3.

218. On nomme *Ordonnée* au diamètre d'un cercle, une demi-corde perpendiculaire à ce diamètre.

La perpendiculaire CD^ au diamètre AB , est une ordonnée à ce diamètre.* Fig. 5.

219. On nomme *Abcisses*, les parties en lesquelles un diamètre est divisé par une ordonnée.

Fig. 5. Les parties AC * & CB du diamètre AB , sont les abscisses de ce diamètre.

220. On nomme *Segment* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle & par une corde †.

Fig. 3. La figure ABC * est un segment de cercle.

221. On nomme *Angle du segment*, un angle qui est formé par la corde qui tend l'arc de ce segment; & par une tangente à ce même arc, tirée de l'une de ses extrémités.

Fig. 4. L'angle ABC * est l'angle du segment CDB .

222. On dit d'un angle, qu'il est *inscrit* dans un segment, ou seulement, qu'il est dans un segment, lorsque son sommet est dans l'arc de ce segment; & que ses côtés passent par les extrémités de cet arc.

Fig. 4. L'angle E * est dans le segment CEB .

223. On nomme *Secteur* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle; & par deux rayons de ce même cercle.

† *Segment* est un nom qui exprime que la chose à laquelle on le donne a été coupée d'une autre.

Les

Les figures $ABCD$ * & $ABCE$ sont Fig. 6.
chacune un secteur de cercle.

224. Enfin, on dit que des segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles qui sont inscrits dans ces segmens, chacun dans chacun, sont égaux.

Les segmens ABC * & DEF sont sem- Fig. 7.
blables, si les angles B & E qui sont inscrits, l'un dans le segment ABC , & l'autre dans le segment DEF , sont égaux.

PROPOSITION I.

PROBLÈME.

225. Trouver le centre d'un cercle donné.

IL faut trouver le centre du cercle X *. Fig. 8.

Const. Tirez dans le cercle X une corde AB , à volonté. Divisez (n) cette corde N. 93. en deux parties égales AE & EB . Du point E , élevez à cette même corde (n) N. 95. la perpendiculaire CD , qui se termine de part & d'autre à la circonférence. Enfin (n), divisez aussi cette perpendiculaire N. 93. en deux parties égales CF & FD . Le point F sera le centre demandé.

Pour la démonstration. Du point G pris à volonté hors de la perpendiculaire CD ,

tirez aux points A , E & B , les lignes droites GA , GE & GB.

Démonst. Si le centre du cercle X étoit un point quelconque G hors de la perpendiculaire CD, les triangles AGE & BGE, qui ont le côté AE égal au côté BE [C], & le côté GE de commun, auroient aussi le côté GA égal au côté GB (n). Ainsi (n), l'angle GEA seroit égal à l'angle GEB; & par conséquent (n), la ligne GE seroit perpendiculaire à la ligne AB.

N. 35. N. 88. N. 19. N. 21. Mais (n), la ligne GE n'est point perpendiculaire à la ligne AB; puisque l'angle GEB n'est qu'une partie de l'angle CEB, qui est un angle droit [C]. Donc, le point G n'est pas le centre du cercle X.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point que l'on prenne le point G; pourvu que ce soit hors de la perpendiculaire CD. Donc, le centre demandé n'est pas hors de cette perpendiculaire.

Enfin, puisque le centre demandé est dans cette perpendiculaire, & que [C] le point F est le seul point de cette ligne qui soit également éloigné des points C & D de la

N. 32. circonférence, le point F est ce centre (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

226, Il suit de la démonstration de ce

problème , que si dans le cercle une corde en coupe une autre perpendiculairement , & par le milieu , cette premiere corde est le diametre de ce cercle.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

227. Une ligne droite qui a plus d'un point de commun avec la circonférence d'un cercle , passe dans ce cercle.

LA ligne droite AB * qui a les points A Fig. 9. & B de communs avec la circonférence du cercle X , passe dans ce cercle.

Const. Prenez sur la ligne AB le point D , à volonté ; mais qui soit cependant entre les points A & B. Tirez ensuite du centre C aux points A , D & B , les lignes droites CA , CD & CB.

Démonst. Dans le triangle ACD , l'angle extérieur CDB est plus grand (n) que son opposé intérieur A. Or , l'angle B est égal à l'angle A (n) ; puisque les côtés CA N. 102. & CB du triangle ACB sont égaux (n). N. 84. 35. Donc , l'angle CDB est plus grand que l'angle B.

Mais puisque , dans le triangle DCB ,

N. III. l'angle CDB est plus grand que l'angle B, le côté CB est aussi plus grand que le côté CD (n). Donc, l'extrémité D de ce dernier côté est dans le cercle X. Par conséquent, puisque [C] la ligne AB passe par cette extrémité, elle passe dans ce cercle,

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

228. *Si une ligne droite qui passe par le centre d'un cercle, divise en deux parties égales une corde qui n'y passe point, elle est perpendiculaire à cette corde ; & si elle est perpendiculaire à cette corde, elle la divise en deux parties égales.*

Fig. 10. PREMIÈREMENT. La ligne droite CD*, qui passe par le centre F du cercle X, & qui divise en deux parties égales AE & EB, la corde AB qui n'y passe point, est perpendiculaire à cette corde.

Const. Tirez du centre F aux points A & B, les lignes droites FA & FB.

Démonst. Dans les triangles AFE & BFE, le côté AE est égal au côté EB [H],

le côté FA au côté FB (n), & le côté N. 35.
FE est commun. Donc (n), l'angle CEA N. 88.
est égal à l'angle CEB; & par consé-
quent (n), la ligne CD est perpendicu- N. 19.
laire à la corde AB.

SECONDEMENT. La ligne droite CD * Fig. 10.
qui passe par le centre F du cercle X, &
est perpendiculaire à la corde AB qui n'y
passe point, divise cette corde en deux
parties égales AE & EB.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les triangles AEF & BEF
sont rectangles l'un & l'autre en E [H].
Ainsi (n), les quarrés des côtés AE & N. 171.
EF sont égaux au quarré de l'hypothénuse
AF; & ceux des côtés EB & EF le sont
à celui de l'hypothénuse BF.

Mais, ces hypothénuses sont égales (n). N. 35.
Donc, les quarrés des côtés AE & EF
sont égaux à ceux des côtés EB & EF
(n); & par conséquent le quarré du côté N. 62.
AE est égal à celui du côté EB (n). Or, N. 64.
puisque les quarrés des côtés AE & EB
sont égaux, ces côtés le sont aussi.

- Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

229. Deux cordes qui se coupent à un point qui n'est pas le centre du cercle, ne se divisent point chacune en deux parties égales.

Fig. 11. **L**ES cordes AB * & CD qui se coupent au point F qui n'est pas le centre du cercle X, ne se divisent point chacune en deux parties égales.

Const. Tirez du centre E au point d'intersection F, la ligne droite EF.

Démonst. Si le point F étoit le milieu de chacune des cordes AB & CD, la ligne EF qui [C] passe par le centre E, seroit perpendiculaire à chacune de ces
N. 228. cordes (n). Ainsi, chaque angle EFB &
N. 21. EFD seroit un angle droit (n); & par conséquent, ces deux angles seroient égaux.

N. 72. Or (n), ces deux angles ne sont point égaux, puisque le second n'est qu'une partie du premier. Donc, le point F n'est pas le milieu de chacune des cordes AB & CD.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

230. *Les cercles dont les circonférences se coupent , n'ont point le même centre.*

LES cercles ABC * & DCB, dont les Fig. 12.
circonférences se coupent aux points B &
C, n'ont point le même centre.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de la circonférence (n). Ainsi, les circon- N. 32.
férences des cercles qui ont le même centre, sont parallèles (n); & par conséquent N. 35.
(n), elles ne se coupent point. N. 56.

Or, les circonférences des cercles ABC & BDC ne sont point parallèles; puisque [H] elles se coupent aux points B & C. Donc, ces cercles n'ont point le même centre.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

231. *Les cercles dont les circonférences se touchent, n'ont point le même centre.*

Fig. 13. **L**ES cercles ABC* & DBE, dont les circonférences se touchent au point B, n'ont point le même centre.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de la circonférence (n). Ainsi les circonférences des cercles qui ont le même centre, sont parallèles (n); & par conséquent (n), elles ne se touchent point.

Or, les circonférences des cercles ABC & DBE ne sont point parallèles; puisque [H] elles se touchent au point B. Donc, ces cercles n'ont point le même centre.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

232. *Si d'un point pris dans un cercle, mais qui n'en est pas le centre, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites : Premièrement, celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite : Secondement, celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées : Troisièmement, enfin, il pourra y en avoir deux égales ; mais il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIÈREMENT. De toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer à la circonférence du cercle X^* , du point A pris dans Fig. 14. ce cercle, mais qui n'en est pas le centre, la ligne AEB qui passe par le centre E , est la plus grande : & la ligne AC qui y passeroit si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E & au point A , les lignes droites DE & DA .

Démonst. Premièrement. Dans le trian-

gle AED, la somme des côtés AE & ED
 N. 114. est plus grande que le côté AD (n). Or,
 N. 61. la ligne AEB est égale à cette somme (n),
 puisque les lignes EB & ED sont égales
 N. 35. (n). Donc, la ligne AEB est plus grande
 que le côté AD.

Secondement. Dans le triangle AEd,
 le côté Ed est plus petit que la somme des
 N. 114. autres côtés EA & Ad (n). Or, la ligne
 N. 35. EAC est égale à ce côté Ed (n). Donc
 cette ligne est plus petite que la somme
 de ces autres côtés. Par conséquent, si
 l'on retranche la même ligne EA, & de
 cette ligne EAC & de cette somme, le
 reste AC de cette dernière ligne sera plus
 petit que le reste Ad de cette somme.

Or, la même démonstration subsiste,
 à quelque point de la circonférence que
 l'on prenne le point D. Donc, de toutes
 les lignes droites qu'il est possible de tirer
 du point A à cette circonférence, la ligne
 AEB est la plus grande; & la ligne AC la
 plus petite.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Des deux lignes
 Fig. 15. droites AC* & AD qui sont tirées à la
 circonférence du cercle X, d'un point A
 pris dans ce cercle, mais qui n'en est pas

le centre, la ligne AC qui est la plus proche du centre E, est la plus grande.

Const. Tirez du centre E aux points C & D, les lignes droites EC & ED.

Démonst. Dans les triangles AEC & AED, l'angle AEC est plus grand que l'angle AED (n), le côté EC est égal au N. 72. côté ED (n), & le côté EA est commun. N. 35. Donc (n), le côté AC est plus grand que N. 121, le côté AD.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, d'un point A* pris dans le cercle X, mais qui n'en Fig. 16. est pas le centre, on peut tirer à la circonférence deux lignes droites égales; mais on ne peut en tirer plus de deux.

Const. Tirez du point A par le centre E, la ligne droite AEB. Du point C pris à volonté sur la circonférence, tirez aux points A & E, les lignes droites CA & CE. Décrivez sur la ligne AEB (n), l'an- N. 119. gle AED qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonst. Premièrement. Dans les triangles ADE & ACE, l'angle AED est égal à l'angle AEC (c), le côté ED au côté EC (n), & le côté EA est commun. N. 35. Donc, le côté AD est égal au côté AC (n). N. 82.

Par conséquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites égales.

Secondement. Toute ligne droite tirée du point A à la circonférence, qui sera plus près du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus grande que cette ligne AD : & toute ligne droite tirée du même point A à la même circonférence, qui sera plus éloignée du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus petite que cette même ligne AD.

Donc, la ligne AD est la seule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il soit possible de tirer du point A à la circonférence. Par conséquent, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C.

Donc, C. Q. F. 3^o D.



PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

233. *Si d'un point pris hors d'un cercle , on tire à la circonférence plusieurs lignes droites : Premièrement , celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit , si elle étoit prolongée , sera la plus petite : Secondement , si elles traversent le cercle , celles qui seront plus près du centre , seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées ; mais si elles n'entrent point dans le cercle , celles qui seront plus près du centre , seront au contraire plus petites que celles qui en seront plus éloignées : Troisièmement , enfin , deux de celles qui traverseront le cercle pourront être égales , & deux de celles qui n'y entreront point pourront aussi l'être ; mais , des unes comme des autres , il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIÈREMENT. De toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer à la circonférence du cercle X^* , d'un point A pris hors de ce cercle , la ligne AEC qui passe par le centre E , est la

Fig. 17.

plus grande : & la ligne AB qui y passeroit , si elle étoit prolongée , est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence , tirez au centre E & au point A , les lignes droites DE & DA.

Démonst. Premièrement. Dans le triangle AED , la somme des côtés AE & ED est plus grande que le côté AD (n). Or ,
 N. 114. la ligne AEC est égale à cette somme (n) ,
 N. 61. puisque les lignes EC & ED sont égales
 N. 35. (n). Donc , la ligne AEC est plus grande que le côté AD.

Secondement. Dans le triangle AEd , le côté EBA est plus petit que la somme
 N. 114. des autres côtés Ed & dA (n). Donc , si du côté EBA on retranche le rayon EB , & de la somme des côtés Ed & dA le rayon Ed , le reste AB de ce côté sera plus petit que le reste Ad de cette somme.

Or , la même démonstration subsiste , à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc , de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence , la ligne AEC est la plus grande ; & la ligne AB la plus petite.

Par conséquent , C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Des deux lignes droites

AF* & AD qui sont tirées à la circon-^{Fig. 18.} férence du cercle X, d'un point A pris hors de ce cercle, & qui le traversent, la ligne AF qui est la plus proche du centre E, est la plus grande.

Mais, des deux lignes AF* & AD qui^{Fig. 19.} sont tirées à la circonférence du cercle X, d'un point A pris hors de ce cercle, & qui n'y entrent point, la ligne AF qui est la plus éloignée du centre E, est la plus grande.

Const. Du centre E*, tirez aux points^{Fig. 18.} F & D, les lignes droites EF & ED. ^{& 19.}

Démonst. Dans les triangles AEF & AED, l'angle AEF est plus grand que l'angle AED (n), le côté EF est égal au^{N. 72.} côté ED (n), & le côté AE, est commun.^{N. 35.} Donc (n), le côté AF est plus grand que^{N. 121.} le côté AD.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, d'un point A*^{Fig. 20.} pris hors du cercle X, on peut tirer à la ^{& 21.} circonférence deux lignes droites égales qui traversent ce cercle; & deux lignes droites égales qui n'y entrent point; mais des unes comme des autres, on ne peut en tirer plus de deux.

Const. Tirez du point A au centre E, la ligne droite AE. Du point C, pris à

volonté sur la circonférence, tirez aux points A & E, les lignes droites CA &

N. 119. CE. Décrivez sur la ligne AE (n), l'angle AED qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonst. Premièrement. Dans les triangles AED & AEC, l'angle AED est égal à l'angle AEC [c], le côté ED au côté N. 35. EC (n), & le côté AE est commun. Donc N. 82. (n), le côté AD est égal au côté AC.

Par conséquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites Fig. 20. égales AC* & AD qui traversent le cer-
Fig. 21. cle; & deux lignes droites égales AC* & AD qui n'y entrent point.

Secondement. Toute ligne droite tirée Fig. 20 du point A* à la circonférence, qui sera
& 21. plus près du centre E que ne l'est la ligne AD, fera plus grande que cette ligne AD dans le premier cas; & plus petite, dans le second: & toute ligne droite tirée du même point A à la circonférence, qui sera plus éloignée du centre E que ne l'est la ligne AD, fera plus petite que cette même ligne AD, dans le premier cas; & plus grande, dans le second. Donc, dans l'un comme dans l'autre cas, la ligne AD est la seule ligne droite égale à la ligne AC,

qu'il soit possible de tirer du point A à la circonférence.

Par conséquent, *dans l'un comme dans l'autre cas*, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C.

Donc C. Q. F. 3^o D.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

234. *Un point duquel on peut tirer à la circonférence d'un cercle plus de deux lignes droites égales, est le centre de ce cercle.*

SI les lignes droites AB*, AC & AD Fig. 22. qui sont tirées chacune du même point A à la circonférence du cercle X, sont égales, ce point est le centre de ce cercle.

Démonst. D'un point qui n'est pas le centre d'un cercle, on ne peut (n) tirer à N. 232. la circonférence plus de deux lignes droites égales. Or, du point A on peut tirer à la circonférence du cercle X plus de deux

lignes droites égales; puisque les trois lignes AB , AC & AD le sont [H]. Donc, ce point est le centre de ce cercle.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

235. *La circonférence d'un cercle ne peut couper à plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

Fig. 23. **L**A circonférence du cercle ABC * qui coupe aux deux points B & C celle du cercle BDC , ne peut la couper à un troisième point.

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper à trois points celle du cercle BDC , ces deux circonférences pourroient avoir trois points de commun. Ainsi, les trois lignes droites que l'on pourroit tirer du centre E du cercle ABC à ces trois points, se termineroient toutes trois & à la circonférence du cercle ABC , & à celle du cercle BDC .

Mais si ces lignes se terminoient toutes trois à la circonférence du cercle ABC ,
N. 35. elles seroient égales (n); puisqu'elles se-

roient des rayons de ce cercle. Donc, du point E, (qui (n) n'est pas le centre du N. 230. cercle BDC, puisqu'il est celui du cercle ABC), on pourroit tirer à la circonférence de ce cercle BDC trois lignes droites égales.

Or (n), cela n'est point possible. Donc, N. 232. la circonférence du cercle ABC ne peut couper à plus de deux points celle du cercle BDC.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

236. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle ; le point auquel elle la touche, est dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

LE point B* auquel la circonférence du Fig. 24. cercle DBE touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Tirez du centre H du cercle ABC au point du contact B, la ligne

droite HB. Du point I, pris à volonté dans le cercle DBE, mais cependant hors de la ligne HB, tirez au point B, la ligne droite IB. Enfin, tirez du point H par le point I, la ligne droite HIC.

Démonst. Dans le triangle HIB, la somme des côtés HI & IB est plus grande
 N. 114. que le côté HB (n). Or, ce côté HB est
 N. 35. égal à la ligne HC (n); & cette ligne est
 N. 72. plus grande que la ligne HE (n). Donc, la somme des côtés HI & IB est plus grande que la ligne HE. Ainsi, si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne HI, le reste IB de cette somme
 N. 66. sera plus grand que le reste IE de cette li-
 N. 32. gne (n). Par conséquent, le point I n'est pas le centre du cercle DBE (n).

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle DBE que l'on prenne le point I, pourvu que ce soit
 N. 32. hors de la ligne HB. Donc (n), aucun point du cercle DBE, pris hors de la ligne HB, ne peut être le centre de ce cercle. Par conséquent, ce centre est dans cette ligne.

Mais [C], le point du contact B, & le centre H du cercle ABC sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact B, le centre H du cercle ABC, & le

centre du cercle DBE sont chacun dans la ligne droite HB.

Par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

237. *Si la circonférence d'un cercle touche extérieurement celle d'un autre cercle ; le point auquel elle la touche , est dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

LE point C* auquel la circonférence du cercle X touche extérieurement celle du cercle Y , le centre A du cercle X , & le centre du cercle Y , sont chacun dans une même ligne droite. Fig. 25.

Const. Tirez du centre A du cercle X par le point de contact C , la ligne droite indéfinie ACB. Du point D pris à volonté dans le cercle Y , mais cependant hors de la ligne ACB , tirez aux points A & C , les lignes droites DA & DC.

Démonst. Dans le triangle ACD , la somme des côtés AC & CD est plus grande que le côté AD (n). Donc , si de la somme de ces côtés AC & CD on re- N. 114.

tranche le rayon AC , & du côté AD le rayon AE , le reste DC de cette somme sera plus grand que le reste DE de ce côté.

- N. 72. Mais (n), ce reste DE est plus grand que la ligne DF . Donc, la ligne DC est aussi plus grande que la ligne DF ; & par conséquent (n), le point D n'est pas le centre du cercle Y .

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle Y que l'on prenne le point D , pourvu que ce soit hors de la ligne ACB . Donc (n), aucun point du cercle Y , pris hors de la ligne ACB , ne peut être le centre de ce cercle. Par conséquent, ce centre est dans cette ligne.

Mais [C], le point de contact C , & le centre A du cercle X , sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact C , le centre A du cercle X , & le centre du cercle Y , sont chacun dans la ligne droite ACB .

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

238. Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement, ou extérieurement, celle d'un autre cercle, elle ne la touche qu'à un seul point.

PREMIÈREMENT. La circonférence du cercle FDG*, qui touche intérieure- Fig. 26.
ment celle du cercle EDB au point D, ne la touche qu'à ce seul point.

Const. Tirez du point de contact D par les centres C & A, la ligne droite DCA (n). Du point B, pris à volonté sur la N. 236.
circonférence du cercle EDB, tirez aux mêmes centres C & A, les lignes droites BC & BA.

Démonst. Dans le triangle ACB, la somme des côtés AC & CB est plus grande que le côté AB (n). Mais, ce côté AB est N. 114.
égal à la ligne AD (n). Donc, la somme N. 35.
des côtés AC & CB est plus grande que la ligne AD. Ainsi, si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne AC, le reste CB de cette somme sera plus grand que le reste CD de cette ligne.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prenne le point B; pourvu que ce ne soit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB sera toujours plus grande que le rayon CD du cercle FDG. Par conséquent, son extrémité B sera toujours hors de ce cercle.

Mais, puisque le point B est toujours hors du cercle FDG, excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point D, la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle EDB qu'à ce seul point D.

Donc, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. La circonférence
Fig. 27. du cercle Y*, qui touche extérieurement celle du cercle X au point D, ne la touche qu'à ce seul point.

Const. Tirez par le point de contact D & par les centres A & C, la ligne droite
N. 237. ADC (n). Du point B, pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirez aux mêmes centres A & C, les lignes droites BA & BC:

Démonst. Dans le triangle ABC, la
N. 114. somme des côtés AB & BC est plus grande que le côté ADC (n). Donc, si de la somme de ces côtés AB & BC, on retranche le rayon AB, & du côté ADC le
rayon

rayon AD, le reste CB de cette somme sera plus grand que le reste CD de ce côté.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne soit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB sera toujours plus grande que le rayon CD du cercle Y. Par conséquent, son extrémité B sera toujours hors de ce cercle.

Mais, puisque le point B est toujours hors du cercle Y, excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point D, la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle X qu'à ce seul point.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

239. *Dans le cercle, les cordes qui sont égales sont également éloignées du centre; & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales.*

PREMIÈREMENT. Les cordes AB * Fig. 28. & CD qui sont égales, sont également éloignées du centre E du cercle X.

Const. Du centre E, abaissez (n) la per- N. 96.

K

pendiculaire EF à la corde AB ; & la perpendiculaire EG à la corde CD. Du même centre E , tirez aux points A & C , les lignes droites EA & EC.

Démonst. Les triangles AFE & CGE sont rectangles , l'un en F & l'autre en G
 N. 171. [C]. Ainsi (n) , les quarrés des côtés AF & FE sont égaux au quarré de l'hypothénuse EA ; & ceux des côtés CG & GE le sont à celui de l'hypothénuse EC.

N. 35. Mais (n) , ces hypothénuses sont égales.

N. 62. Donc (n) , les quarrés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE. Par conséquent , puisque les côtés AF & CG , qui sont les moitiés des cordes AB
 N. 228. & CD (n) , sont égaux [H] , les côtés FE & GE le sont aussi.

N. 215. Or (n) , ces côtés FE & GE sont les distances du centre E aux cordes AB & CD. Donc , ces cordes sont également éloignées de ce centre.

Par conséquent , C. Q. F. 1^o D.

Fig. 28. SECONDEMENT. Les cordes AB* & CD qui sont également éloignées du centre E du cercle X , sont égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. On démontre de la même manière dont on vient de le faire , que dans les triangles AFE & CGE , les quar-

rés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE. Donc, puisque les côtés FE & GE, qui (n) sont les distances du centre E aux cordes AB & CD, sont égaux [H], les côtés AF & CG le sont aussi. N. 215.

Or (n), ces côtés AF & CG sont les moitiés des cordes AB & CD, chacun de chacune. Donc (n), ces cordes sont égales. N. 228. N. 67.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

240. *Dans le cercle, la corde qui passe par le centre est la plus grande; & les cordes qui sont plus près du centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*

PREMIÈREMENT. La corde AB* Fig. 29. qui passe par le centre C du cercle X, est la plus grande que l'on puisse tirer dans ce cercle.

Const. Tirez la corde DE à volonté, mais qui ne passe point par le centre C. Du même centre C, tirez aux points D & E, les lignes droites CD & CE.

K ij

N. 33. *Démonst.* Puisque (n) la corde AB est un diamètre du cercle X, elle est égale à la somme des côtés CD & CE du triangle

N. 35. DCE (n). Mais, la somme de ces côtés est

N. 114. plus grande que le côté DE (n). Donc, la corde AB est aussi plus grande que ce côté.

Or, la même démonstration subsiste, par quelque point du cercle X que l'on tire la corde DE, pourvu que ce ne soit pas par le centre C. Donc, la corde AB qui [H] passe par ce centre, est la plus grande qu'il soit possible de tirer dans ce cercle.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 30. SECONDEMENT. La corde AB*, qui est plus près que la corde DE du centre C du cercle X, est plus grande que cette corde DE.

Const. Tirez du centre C aux points A, D, E & B, les lignes droites CA, CD, CE & CB.

Démonst. Dans les triangles ACB & DCE, l'angle ACB est plus grand que N. 72. l'angle DCE (n), le côté CA est égal au N. 35. côté CD (n), & le côté CB au côté CE N. 35. (n). Donc, le côté AB est plus grand que N. 121. le côté DE (n).

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

241. *Si une ligne droite qui est perpendiculaire au diamètre d'un cercle, est tirée de l'une des extrémités de ce diamètre : Premièrement, cette extrémité est le seul point que cette perpendiculaire ait de commun avec ce cercle : Secondement, de cette même extrémité, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette même perpendiculaire & ce même cercle.*

PREMIÈREMENT. L'extrémité B.* Fig. 31. du diamètre AB, est le seul point que la perpendiculaire BC à ce diamètre, peut avoir de commun avec le cercle X.

Const. Du point E, pris à volonté sur la perpendiculaire BC, mais qui soit cependant différent du point B, tirez au centre D, la ligne droite ED.

Démonst. Dans le triangle DEB, l'angle B est droit [H]. Donc (n), il est plus N. 104. grand que l'angle DEB; & par conséquent (n), le côté DE est plus grand que N. 111. le côté DB.

Or, la même démonstration subsiste,

à quelque point de la perpendiculaire BC que l'on prenne le point E ; pourvu que ce ne soit pas au point B. Donc , le côté DE sera toujours plus grand que le rayon DB ; & par conséquent , son extrémité E sera toujours hors du cercle X.

Mais ; puisque le point E est toujours hors de ce cercle , excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point B , la perpendiculaire BC ne peut avoir que ce seul point B de commun avec ce même cercle.

Par conséquent , C. Q. F. 1^o D.

Fig. 32. SECONDEMENT. Du point B* , on ne peut tirer aucune ligne droite entre la perpendiculaire BC & le cercle X.

Const. Du point B , tirez entre le diamètre AB & la perpendiculaire BC , une ligne droite quelconque BF. Du centre D ,
N 96. abaissez (n) la perpendiculaire DE à cette ligne.

Démonst. Le triangle DEB est rectan-
N. 104. gle en E [C]. Donc (n) , l'angle DEB est plus grand que l'angle DBE ; & par conséquent , le côté DB est plus grand que le
N. 111. côté DE (n). Mais , puisque le rayon DB est plus grand que le côté DE , l'extrémité E de ce côté est dans le cercle X. Ainsi , puisque la ligne BF passe par cette extrémité , elle passe dans ce cercle.

Or, la même démonstration subsiste, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tire la ligne BF. Donc, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire & le cercle X.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE I.

242. Il suit de la première partie de ce théorème, que *si une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémités du diamètre d'un cercle, est perpendiculaire à ce même diamètre, elle est tangente à ce cercle* (n). N. 212.

COROLLAIRE II.

243. Il suit de ce corollaire, que *pour tirer d'un point donné sur la circonférence d'un cercle, une tangente à ce cercle, il faut tirer un diamètre qui se termine à ce point ; & de ce même point, élever une perpendiculaire à ce diamètre* (n). N. 95.

SCHOLIE.

244. L'angle formé par une tangente AB* & par un arc AC, s'appelle un an-
gle de contingence. Il ne peut être divisé
par aucune ligne droite (n) ; mais il peut
l'être en une infinité de parties, par des

Fig. 33.

N. 241.

N. 238. arcs AD , AE , &c (n). Or, ces deux propriétés opposées, ont occasionné aux physiciens beaucoup de raisonnemens, dont aucun n'est satisfaisant.

Celui qui paroît avoir été le moins mal reçu, prétend que les arcs AD , AE , &c. ne divisent point l'angle CAB ; mais qu'ils touchent seulement la ligne AB en des points d'autant plus longs, que ces arcs sont moins courbes.

On ne conçoit pas trop comment ces arcs peuvent passer entre les côtés AB & AC de l'angle BAC , sans cependant le diviser. Mais, à l'égard de toucher la ligne AB en des points d'autant plus longs que ces arcs sont moins courbes; cela doit être, suivant leurs définitions. Car, leurs lignes ayant une largeur, quelque étroite qu'on veuille la concevoir, il est évident que plus deux de leurs lignes s'entre-couperont obliquement, plus le point d'intersection sera long. Or, il en est de même du point de contact.

Les raisons de cette indivisibilité & de cette divisibilité sont cependant très-simples. Le propre d'une ligne droite est d'aller toujours directement d'un point à un autre. Ainsi, elle ne peut partir du point A pour passer au dessous de la tangente AB , sans couper la convexité de l'arc AC . Une ligne courbe au contraire, se prête à cette con-

vexité, & passe entre l'arc & la tangente, sans toucher ni à l'un, ni à l'autre.

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

245. *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente à ce cercle.*

IL faut tirer du point A * pris hors du cercle BD, une tangente à ce cercle. Fig. 34

Const. Tirez du point A au centre C, la ligne droite AC. Du même centre C, & avec la ligne AC prise pour rayon, décrivez le cercle AE. Du point B auquel cette ligne AC coupe la circonférence du cercle BD, élevez (n) la perpendiculaire BE à cette même ligne AC. N. 95. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle AE, tirez au centre C la ligne droite EC. Enfin, tirez du point A au point D, auquel cette ligne coupe la circonférence du cercle BD, la ligne droite AD. Cette dernière ligne sera la tangente demandée.

Démonst. Dans les triangles CDA & CBE, le côté CD est égal au côté CB

N. 35. & le côté CA au côté CE (n), & l'an-
 N. 82. gle C est commun. Donc (n), l'angle
 CDA est égal à l'angle CBE; & par consé-
 séquent, puisque le dernier est un angle
 droit [c], le premier en est aussi un.

Mais, puisque l'angle CDA est un an-
 gle droit, la ligne AD est perpendiculaire
 au rayon CD. Or [c], cette perpendicu-
 laire est tirée de l'extrémité D de ce
 rayon. Donc, elle est tangente au cercle
 N. 242 BD (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

246. *Si une ligne droite touche un cercle, la ligne droite qui est tirée du centre au point de contact, est perpendiculaire à cette tangente.*

Fig. 35. **L**A ligne droite AB* qui est tirée du centre A du cercle X au point B, auquel la ligne droite CD le touche, est perpendiculaire à cette tangente

Const. Tirez du centre A à un point quelconque E de la ligne CD, mais qui soit cependant différent du point B, la ligne droite AE.

Démonst. Si quelque ligne droite AE tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, pouvoit être perpendiculaire à la tangente CD, le triangle BAE seroit rectangle en E. Ainsi (n), l'angle AEB N. 104. seroit plus grand que l'angle ABE; & par conséquent (n), le côté AB seroit plus N. 111. grand que le côté AE.

Or (n), cela ne peut point être; puis- N. 72. que (n) ce même côté AB est égal à la N. 35. partie AF du côté AE.

Donc, aucune ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, ne peut être perpendiculaire à la tangente CD. Donc, la ligne AB est perpendiculaire à cette tangente.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

247. Si une ligne droite touche un cercle, la perpendiculaire à cette tangente, qui est tirée du point de contact, passe par le centre.

Fig. 36. **D**ANS le cercle X^* , la perpendiculaire AB à la tangente CD , qui est tirée du point de contact A , passe par le centre.

Const. Du point E , pris à volonté hors de la perpendiculaire AB ; tirez au point A , la ligne droite EA .

Demonst. Si le point E étoit le centre du cercle X , la ligne EA seroit perpendiculaire à la tangente CD (n). Ainsi, l'angle EAD seroit un angle droit; & par conséquent, il seroit égal à l'angle BAD (n). Mais, cela ne peut point être (n). Donc, le point E n'est pas le centre du cercle X .

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point hors de la perpendiculaire AB que l'on prenne le point E . Donc,

le centre du cercle X est dans cette perpendiculaire.

Par conséquent , C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

248. *L'angle qui a son sommet au centre d'un cercle , est double de celui qui a le sien dans la circonférence , lorsqu'ils s'appuient tous les deux sur le même arc.*

L'ANGLE AEC* qui a son sommet E Fig. 37 au centre E du cercle X, & s'appuie sur & 38. l'arc AC, est double de l'angle ABC qui a son sommet B dans la circonférence, & s'appuie sur le même arc AC.

Const. Tirez du point B, par le centre E, la ligne droite BED.

Démonst. L'angle AED, qui est extérieur au triangle AEB, est égal (n.) à la N. 135. somme des angles intérieurs EAB & EBA qui lui sont opposés. Or, ces angles intérieurs sont égaux (n), puisque N. 84. les côtés EA & EB le sont (n). Donc, N. 35. l'angle AED est double de l'angle ABD. Et par des raisons pareilles, l'angle DEC est aussi double de l'angle DBC.

Or, puisque (*fig. 37.*) chaque partie AED & DEC de l'angle AEC, est double de chaque partie correspondante ABD & DBC de l'angle ABC, l'angle AEC est aussi double de l'angle ABC.

Et puisque (*fig. 38.*) l'angle AED est double de l'angle ABD, & que la partie DEC du premier, est double de la partie DBC du second; l'autre partie AEC du même premier, est aussi double de l'autre partie ABC du même second.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il suit de ce théorème, que *l'angle qui a son sommet dans la circonférence d'un cercle, n'a pour mesure que la moitié de l'arc sur lequel il s'appuie.*

*Fig. 37
& 38.*

L'angle ABC * qui a son sommet B dans la circonférence du cercle X, n'a pour mesure que la moitié de l'arc AC sur lequel il s'appuie.

Const. Tirez du centre E aux points A & C, les lignes droites EA & EC.

Démonst. L'angle AEC a pour mesure N. 37. tout l'arc AC (n). Or, l'angle ABC n'est N. 248. que la moitié de l'angle AEC (n). Donc, il n'a pour mesure que la moitié de l'arc AC.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

250. *Les angles qui sont dans le même segment (n), sont égaux.* N. 222.

LES angles B * & D qui sont dans le même segment ABDC, sont égaux. Fig. 39.

Pour la démonstration, achevez le cercle X.

Démonst. Les angles B & D ont chacun leur sommet dans la circonférence du cercle X, & s'appuient chacun sur le même arc AEC. Ainsi (n), ils ont cha- N. 249.
cun pour mesure la moitié de cet arc. Or, puisque ces angles ont chacun la même mesure, ils sont égaux (n).

N. 37.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

251. *La somme des angles opposés d'un quadrilatere inscrit † dans un cercle, est égale à celle de deux angles droits.*

LA somme des angles opposés du quadrilatere ABCD qui est inscrit dans le
 Fig. 40. cercle X^* , par exemple celle des angles BAD & BCD, est égale à celle de deux angles droits.

Démonst. L'angle BAD a pour mesure
 N. 249. la moitié de l'arc BCD (n); & l'angle BCD a pour mesure la moitié de l'arc BAD (n). Donc, la somme de ces deux
 N. 249. angles a pour mesure la moitié de la circonférence du cercle X.

N. 38. Mais (n), la moitié de la circonférence d'un cercle est la mesure de la somme de deux angles droits. Donc, la somme des deux angles BAD & BCD, & celle de deux angles droits, ont chacune la même mesure.

Par conséquent, elles sont égales.
 Donc, C. Q. F. D.

† Une figure est *inscrite* dans une autre, lorsque tous ses angles ont leur sommet dans la circonférence de cette autre.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

252. *Les segmens de cercle qui ont la même corde, & sont vers un même côté, ne sont point semblables.*

LES segmens de cercle ABC * & ADC Fig. 41. qui ont la même corde AC, & sont vers le même côté, ne sont point semblables.

Const. Du point B, pris à volonté sur l'arc du plus grand segment, tirez aux points A & C, les lignes droites BA & BC. Du point D auquel la ligne BC coupe l'arc du plus petit segment, tirez au point A la ligne droite DA.

Démonst. L'angle ADC, qui est extérieur au triangle ABD, est plus grand (n) N. 102. que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Or, puisque l'angle ADC, qui est inscrit dans le segment ADC, n'est point égal à l'angle B qui est inscrit dans le segment ABC, ces deux segmens ne sont point semblables (n).

N. 224.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

253. *Les segmens de cercle qui ont des cordes égales, & qui sont semblables, sont égaux.*

Fig. 42. **L**ES segmens de cercle ABC * & DEF qui ont des cordes égales AC & DF, & qui sont semblables, sont égaux.

Const. Posez par pensée le segment ABC sur le segment DEF, de manière que le point A étant sur le point D, la corde AC soit sur la corde DF.

Démonst. Le point C tombera sur le N. 70. point F (n), puisque [H] la corde AC est égale à la corde DF. Ainsi, la corde DF sera commune aux segmens ABC & DEF. Par conséquent, si l'arc ABC tomboit, ou au dessus, ou au dessous, de l'arc DEF, deux segmens de cercle qui auroient la même corde DF, & seroient vers le même côté, pourroient être semblables.

N. 252. Or (n), cela n'est point possible. Donc, l'arc ABC tombera sur l'arc DEF; & par conséquent, les segmens ABC & DEF se couvriront réciproquement. Mais, puis-

que ces segmens se couvrent réciproquement, ils sont égaux (n).

N. 69.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

PROBLÈME.

254. *Trouver le centre d'un arc de cercle donné.*

IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD*.

Fig. 43.

Const. Prenez sur l'arc CBD trois points C, B & D, à volonté. Tirez du point B aux points C & D, les cordes BC & BD. Divisez (n) chacune de ces N. 93. cordes en deux parties égales BE & EC, BF & FD. Enfin, du point E, élevez (n) N. 95. la perpendiculaire EA à la corde BC; & du point F, la perpendiculaire FA à la corde BD. Le point A, auquel ces perpendiculaires se rencontrent, est le centre demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point A aux points C, B & D, les lignes droites AC, AB & AD.

Démonst. Dans les triangles AEC & AEB, qui sont rectangles l'un & l'autre

236 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

en E [C], le côté EC est égal au côté EB [C], & le côté EA est commun. Donc,
N. 82. le côté AC est égal au côté AB (n).

Or, en comparant le triangle AFB au triangle AFD, on démontre de la même manière, que le côté AB est égal au côté AD.

Donc, on peut tirer du point A à l'arc CBD plus de deux lignes droites égales. Par conséquent, ce point est le centre de
N. 234 cet arc (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

255. *Les angles égaux qui ont leurs sommets dans les circonférences de cercles égaux, s'appuient sur des arcs égaux.*

Fig. 44. LES arcs AIC* & DKF, sur lesquels s'appuient les angles égaux B & DEF, qui ont leurs sommets B & E dans les circonférences des cercles égaux G & H, sont aussi égaux.

Const. Tirez du point A au point C, la ligne droite AC; & du point D au point F, la ligne droite DF. Tirez aussi

du centre G aux points A & C, les lignes droites GA & GC; & du centre H aux points D & F, les lignes droites HD & HF.

Démonst. L'angle B a son sommet dans la circonférence [H], l'angle G a le sien au centre [C], & ces deux angles s'appuient sur le même arc AIC. Donc (n), N. 248. l'angle G est double de l'angle B; & par des raisons pareilles, l'angle H est aussi double de l'angle DEF.

Mais, puisque les angles B & DEF sont égaux [H], les angles G & H le sont aussi (n). Ainsi, dans les triangles AGC N. 67. & DHF, l'angle G est égal à l'angle H, le côté GA au côté HD (n), & le côté N. 210. GC au côté HF. Donc, les côtés AC & DF sont égaux (n). N. 82.

Ainsi, les segmens ABC & DEF, qui sont semblables (n), [puisque [H] les N. 224. angles B & DEF sont égaux], ont des cordes égales AC & DF. Donc, ces segmens sont égaux (n). Par conséquent, si N. 253. du cercle G on retranche le segment ABC; & du cercle H le segment DEF, les restes, qui sont les segmens AIC & DKF, sont aussi égaux (n). N. 64.

Mais, puisque ces derniers segmens sont égaux, & qu'ils ont des cordes égales AC

& DF, ils ont aussi des arcs égaux AIC
 N. 253. & DKF (n).
 Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

256. Il suit de ce théorème, que les angles égaux, qui ont leurs sommets aux centres de cercles égaux, s'appuient sur des arcs égaux.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

257. Les angles qui ont leurs sommets dans les circonférences de cercles égaux, & qui s'appuient sur des arcs égaux, sont aussi égaux.

Fig. 44. **L**ES angles B* & DEF qui ont leurs sommets B & E dans les circonférences des cercles égaux G & H, & qui s'appuient sur les arcs égaux AIC & DKF, sont aussi égaux.

Const. Tirez du point E aux points L & M, pris à volonté sur la circonférence du cercle H, l'un au dessous du point F & l'autre au dessus, les lignes droites EL & EM.

Démonst. Si l'angle B n'étoit point égal à l'angle DEF, il le feroit à quelque angle DEL plus petit que cet angle; ou à quelque angle DEM, plus grand que ce même angle.

Or, l'angle B n'est point égal à un angle DEL plus petit que l'angle DEF; puisque s'il l'étoit, l'arc AIC seroit égal à l'arc DKL (n). Mais [H], le même arc N. 255. AIC est aussi égal à l'arc DKF. Donc (n), N. 62. l'arc DKL seroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut être (n). N. 72.

Et l'angle B n'est point non plus égal à un angle DEM plus grand que l'angle DEF; puisque s'il l'étoit, l'arc AIC seroit égal à l'arc DKM (n). Mais [H], le même arc N. 255. AIC est aussi égal à l'arc DKF. Donc (n), N. 62. l'arc DKM seroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut encore être (n). N. 72.

Donc, l'angle B est égal à l'angle DEF.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

258. Il suit de ce théorème, que les angles qui ont leurs sommets aux centres de cercles égaux, & qui s'appuient sur des arcs égaux, sont aussi égaux.



PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

259. *Dans les cercles égaux, les cordes égales tendent des arcs égaux.*

Fig. 45. **D**ANS les cercles égaux B* & E, les arcs AGC & DHF qui sont tendus par les cordes égales AC & DF, sont égaux.

Const. Tirez du centre B aux points A & C, les lignes droites BA & BC; & du centre E aux points D & F, les lignes droites ED & EF.

Démonst. Dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED (n),
N. 210. le côté BC au côté EF (n), & le côté AC
N. 88. au côté DF [H]. Donc (n), l'angle B est égal à l'angle E.

Or, puisque les angles B & E, qui [C] ont leurs sommets aux centres des cercles égaux B & E, sont égaux, les arcs AGC & DHF, sur lesquels ces angles s'appuient
N. 256. [C], sont aussi égaux (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

260. *Dans les cercles égaux, les arcs égaux sont tendus par des cordes égales.*

DANS les cercles égaux B^* & E , les Fig. 45. cordes AC & DF qui tendent les arcs égaux AGC & DHF , sont égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les angles B & E qui $[C]$ ont leurs sommets aux centres des cercles égaux B & E , s'appuient sur des arcs AGC & DHF qui sont aussi égaux $[H]$. Donc, ces angles sont égaux (n) . Ainsi, dans N. 25. les triangles ABC & DEF , l'angle B est égal à l'angle E , le côté BA au côté ED , & le côté BC au côté EF (n) . Donc, le N. 210. côté AC est égal au côté DF (n) . N. 82.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX.

PROBLÈME.

261. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales ,
 Fig. 46. l'arc de cercle ABC *

Const. Tirez de l'extrémité A' de l'arc ABC à son autre extrémité C , la ligne
 N. 93. droite AC , Divisez (n) cette ligne en
 N. 95. deux parties égales DA & DC. Enfin (n),
 élevez du point D la perpendiculaire DB à cette même ligne. Cette perpendiculaire divisera l'arc ABC en deux parties BEA & BFC, qui sont égales.

Pour la démonstration. Tirez du point B aux points A & C, les lignes droites BA & BC.

Démonst. Dans les triangles BDA & BDC, qui sont rectangles l'un & l'autre en D [c], le côté DA est égal au côté DC [c], & le côté DB est commun.
 N. 82. Donc, le côté BA est égal au côté BC (n).

Or, puisque les cordes BA & BC sont
 N. 259. égales, les arcs BEA & BFC sont égaux (n),
 Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

262. Il suit de ce problème, que pour diviser un arc de cercle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales; & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales, en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.

Mais à l'égard de la division d'un arc de cercle en un nombre déterminé de parties égales, il en est de même que de celle d'un angle (n° 92). La solution de l'un de ces deux problèmes donneroit celle de l'autre.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

263. L'angle qui est inscrit dans un demi-cercle, est droit : celui qui est inscrit dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu : enfin, celui qui est inscrit dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, est obtus.

PREMIÈREMENT. L'angle ABC * Fig. 47. qui est inscrit dans le demi-cercle $ATBC$, est un angle droit.

Const. Prolongez le côté CB vers N, indéfiniment; & tirez du point B au centre O, la ligne droite BO.

Démonst. L'angle ABN est extérieur
 N. 135. au triangle ABC. Ainsi (n), il est égal à la somme des angles intérieurs C & A
 N. 84. qui lui sont opposés. Mais (n), ces angles C & A sont égaux, l'un à l'angle OBC,
 N. 35. & l'autre à l'angle OBA; puisque (n) les côtés OC & OB du triangle COB sont égaux, de même que les côtés OA & OB
 N. 62. du triangle AOB. Donc (n), l'angle ABN est égal à la somme des angles OBC
 N. 72. & OBA; & par conséquent (n), à l'angle ABC.

Or, puisque les angles ABN & ABC sont égaux, la ligne AB est perpendicu-
 N. 19. laire à la ligne NBC (n). Ainsi, l'angle ABC est un angle droit,

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 47. SECONDEMENT. L'angle EFG* qui est inscrit dans le segment EQFG plus grand qu'un demi-cercle, est un angle aigu.

Const. Tirez du point G par le centre P, le diamètre GQ; & du point F au point Q, la ligne droite FQ.

Démonst. L'angle EFG est plus petit que
 N. 72. l'angle QFG (n). Or, l'angle QFG est un angle droit [D]; puisque le segment QFG

dans lequel il est inscrit, est un demi-cercle [C]. Donc, l'angle EFG est plus petit qu'un angle droit. Par conséquent, il est un angle aigu (n).

N. 23.

Donc, C. Q. F. 2° D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, l'angle IKL* qui est inscrit dans le segment IVKL, plus petit qu'un demi-cercle, est un angle obtus. Fig. 47.

Const. Tirez du point L par le centre R, le diamètre LS; & du point K au point S, la ligne droite KS.

Démonst. L'angle IKL est plus grand que l'angle SKL (n). Or, l'angle SKL est un angle droit [D], puisque le segment SVKL dans lequel il est inscrit, est un demi-cercle [C]. Donc, l'angle IKL est plus grand qu'un angle droit. Par conséquent, il est un angle obtus (n). N. 72.

N. 23.

Donc, C. Q. F. 3° D.

SCHOLIE.

On démontre aussi ce théorème, de la manière suivante.

Les angles ABC*, EFG & IKL ont pour mesure (n), l'un, la moitié de l'arc ADC, l'autre, la moitié de l'arc EHG; & le dernier, la moitié de l'arc IML. Or Fig. 47.
N. 249.

[H], les moitiés de ces arcs sont ; l'une le quart de la circonférence d'un cercle ; l'autre, moins que ce quart ; & la dernière, N. 38, plus que ce même quart. Donc (n), les angles proposés sont ; l'un, un angle droit ; 23 & 22. l'autre, un angle aigu ; & le dernier, un angle obtus.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

264. Dans le cercle, les angles dans les segmens, & les angles des segmens, sont alternativement † égaux.

Fig. 48. D A N S le cercle H^* qui est divisé par la corde CD en deux segmens CFD & CEGD : Premièrement, l'angle E qui est dans le segment CEGD, est égal à l'angle DCA du segment CFD.

Const. Tirez du point de contact C par le centre H, le diamètre CG ; & du point G au point D, la ligne droite GD.

Démonst. La somme des angles DCA N. 72. & DCG, est égale à l'angle ACG (n),

† C'est-à-dire, que l'angle dans le segment & l'angle du segment doivent être pris ; l'un, d'un côté de la ligne coupante ; & l'autre, de l'autre côté de la même ligne.

qui est un angle droit (n). Or, la somme N. 246.
des angles G & DCG est aussi égale à un
angle droit (n); puisque le triangle CDG N. 136
est rectangle en D (n). Donc, la somme N. 263.
des angles DCA & DCG est égale (n) N. 62.
à celle des angles G & DCG; & par
conséquent, l'angle G est égal à l'angle
DCA (n). N. 64.

Mais, les angles G & E sont égaux
(n), puisqu'ils sont dans le même segment N. 250.
CEGD. Donc, l'angle E est aussi égal
à l'angle DCA.

Secondement, l'angle F qui est dans le
segment CFD, est égal à l'angle DCB du
segment CEGD.

Démonst. Les angles F & E sont les
angles opposés du quadrilatere FDEC;
ainsi leur somme est égale à celle de
deux angles droits (n). Or, la somme des N. 251.
angles DCB & DCA est aussi égale à
celle de deux angles droits (n). Donc, la N. 97.
somme des angles F & E est égale à celle
des angles DCB & DCA (n). Mais [D], N. 62.
l'angle E est égal à l'angle DCA. Donc,
l'angle F est égal à l'angle DCB.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

265. Il suit de ce théorème, que dans
le cercle, l'angle du segment a pour mesure

la moitié de l'arc qui est tendu par la corde de ce segment.

Fig. 48. Dans le cercle H^* , l'angle DCA a pour mesure la moitié de l'arc DFC ; & l'angle DCB , la moitié de l'arc $DGEC$.

Const. Des points F & E , pris à volonté, l'un dans l'arc DFC , & l'autre dans l'arc $DGEC$, tirez aux points D & C , les lignes droites FD & FC , ED & EC .

Démonst. l'angle DCA est égal à l'angle E (n). Or, l'angle E a pour mesure la moitié de l'arc DFC (n). Donc, l'angle DCA a aussi pour mesure la moitié du même arc.

Pareillement, l'angle DCB est égal à l'angle F (n). Or, l'angle F a pour mesure la moitié de l'arc $DGEC$ (n). Donc, l'angle DCB a aussi pour mesure la moitié du même arc.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII.

PROBLÈME.

266. *Décrire sur une ligne droite donnée , un segment de cercle , qui soit capable † d'un angle donné.*

IL faut décrire sur la ligne droite AB^* , Fig. 49. un segment de cercle , qui soit capable de l'angle C .

Const. Décrivez sous la ligne AB (n), N. 119, l'angle BAD qui ait le point A pour sommet , & soit égal à l'angle C . Du même point A , élevez (n) la perpendiculaire AE N. 95. à la ligne AD . Divisez (n) la ligne AB en N. 93. deux parties égales AF & FB . Du point F , élevez aussi (n) la perpendiculaire FE à cette N. 95. même ligne AB . Enfin, du point E , auquel ces deux perpendiculaires se rencontrent , pris pour centre , & avec la ligne EA , prise pour rayon , décrivez l'arc AGB . Le segment AGB , que cet arc formera avec la ligne AB , est le segment demandé.

Pour la démonstration. Achevez le cercle $AGBH$.

† Un segment est capable d'un certain angle , lorsque les angles que l'on inscrit dans ce segment sont égaux à ce certain angle.

Démonst. La ligne AD est tangente au
 N. 242. cercle AGBH (n) ; puisque [C] elle est
 tirée de l'extrémité A du rayon EA au-
 N. 221. quel elle est perpendiculaire. Donc (n),
 l'angle BAD est l'angle du segment AHB ;
 N. 264. & par conséquent (n), il est égal à un an-
 gle quelconque inscrit dans le segment
 AGB.

Mais [C], le même angle BAD est aussi
 égal à l'angle C. Donc un angle quelcon-
 que inscrit dans le segment AGB, fera égal
 N. 62. à l'angle C (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLÈME.

267. *Diviser un cercle en deux segmens ,
 dont l'un soit capable d'un angle donné.*

Fig. 50. **I**L faut diviser le cercle X, en deux
 segmens, dont l'un soit capable de l'an-
 gle E.

Const. Du point C, pris à volonté sur
 N. 243. la circonférence, tirez (n) la tangente AB,
 au cercle X. Décrivez sur cette tangente
 N. 119. (n), l'angle DCB qui ait le même point

précèdent C pour sommet, & soit égal à l'angle E. Le côté DC divisera le cercle X, comme il est demandé.

Démonst. L'angle DCB est l'angle du segment CGD (n). Ainsi, il est égal (n) ^{N. 221.} _{N. 264.} à un angle quelconque inscrit dans le segment CFD. Mais, le même angle DCB est aussi égal à l'angle E [C]. Donc (n), ^{N. 62.} un angle quelconque inscrit dans le segment CFD, sera égal à l'angle E.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

268. *Dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.*

DANS le cercle X*, le rectangle des parties AF & FB de la corde AB, est égal ^{Fig. 51} _{52, 53} au rectangle des parties CF & FD de la corde CD. _{& 54.}

Les cordes AB & CD passent chacune par le centre du cercle; ou une seule y passe, & est, ou perpendiculaire, ou oblique

à celle qui n'y passe point ; ou enfin , aucune n'y passe.

PREMIER CAS.

Fig. 51. Lorsque les cordes AB^* & CD passent chacune par le centre F .

Démonst. Les parties AF , FB , CF & FD sont toutes égales (n). Ainsi le rectangle des deux premières est égal à celui des deux dernières.

SECOND CAS.

Fig. 52. Lorsqu'une seule des cordes AB^* & CD , par exemple la corde AB , passe par le centre E ; & est perpendiculaire à l'autre corde CD qui n'y passe point.

Const. Tirez du point C au centre E , la ligne droite CE .

Démonst. La ligne AB est divisée en deux parties AF & FB ; & le point E est son milieu (n). Ainsi , le rectangle de ces deux parties , avec le carré de la ligne EF , est égal au carré de la ligne EB (n) ; & par conséquent , à celui de la ligne EC , puisque ces lignes EB & EC sont égales (n). Mais , les carrés des lignes CF & EF sont aussi égaux au carré de la même ligne EC (n), puisque le triangle CFE est rectangle en F [H]. Donc , le rectangle précédent , avec le carré de la

ligne EF, est égal aux quarrés des lignes CF & EF (n). Par conséquent, ce même N. 62.
rectangle est égal au quarré de la ligne CF (n).

N. 64.

Or, le quarré de cette ligne CF est la même chose que le rectangle des parties CF & FD ; puisque ces parties sont égales (n). Donc, le rectangle des parties N. 228.
AF & FB, est égal à celui des parties CF & FD †.

TROISIEME CAS.

Lorsqu'une seule des cordes AB & CD, Fig. 53.
par exemple la corde AB, passe par le centre E ; & est oblique à l'autre corde CD qui n'y passe point.*

Const. Tirez du point D au centre E, la ligne droite DE ; & du même centre E, abaissez (n) la perpendiculaire EG à la N. 96.
corde CD.

Démonst. La ligne CD est divisée en deux parties CF & FD ; & le point G est son milieu (n). Ainsi, le rectangle de N. 228.
ces deux parties, avec le quarré de la ligne GF, est égal au quarré de la ligne GD (n). Par conséquent, ce même rectangle, N. 187.

† Ce second cas est celui que l'on nomme la *propriété du cercle*. On l'exprime ordinairement en disant que *dans le cercle, le rectangle des abscisses est égal au quarré de l'ordonnée*.

avec les quarrés des lignes GF & GE, est
 N. 63. égal à ceux des lignes GD & GE (n).

Mais, les quarrés des lignes GF & GE
 sont égaux au quarré de la ligne EF : &
 ceux des lignes GD & GE le sont au
 N. 171. quarré de la ligne ED (n); puisque les
 triangles EGF & EGD sont rectangles
 l'un & l'autre en G [C]. Donc, le rec-
 tangle précédent, avec le quarré de la li-
 gne EF, est égal au quarré de la ligne
 N. 61. ED (n).

Or, la ligne AB est aussi divisée en
 deux parties AF & FB; & le point E est
 N. 35. aussi son milieu (n). Donc, le rectangle
 de ces deux parties, avec le quarré de la
 ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB
 N. 187. (n); & par conséquent, à celui de la
 même ligne précédente ED, puisque ces
 N. 35. lignes EB & ED sont égales (n).

N. 62. Donc (n), le rectangle des parties AF
 & FB, avec le quarré de la ligne EF, est
 égal au rectangle des parties CF & FD,
 avec le quarré de la même ligne EF. Par
 conséquent, ce premier rectangle est égal
 N. 64 au dernier (n).

QUATRIEME CAS.

Fig. 54. Enfin, lorsqu'aucune des cordes AB*
 & CD ne passe par le centre E.

Const. Tirez par le centre E & par le point F, le diametre GH.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties GF & FH [D]; puisque la corde GH passe par le centre E [C]. Or, par la même raison, le rectangle des parties CF & FD est aussi égal à celui des mêmes parties GF & FH. Donc, le rectangle des parties AF & FB, est égal à celui des parties CF & FD (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE * *.

269. Il suit de ce théorème, que dans le cercle, si une corde est divisée en deux parties quelconques, le rectangle de ces deux parties, avec le carré de la distance du point de section au centre, est égal au carré du rayon de ce même cercle.

Le rectangle des parties CF * & FD de la corde CD, avec le carré de la distance FE du point de section F au centre E, est égal au carré du rayon EH. Fig. 54.

Const. Tirez par le point de section F le diametre HEG.

Démonst. Puisque les cordes CD & GH s'entrecoupent au point F, le rectangle des parties CF & FD de la première, est égal à celui des parties GF & FH de la seconde (n). Or, le rectangle de ces deux N. 268.

256 LES ELÉMENTS D'EUCLIDE.

dernieres parties , avec le quarré de leur demi-différence FE, est égal au quarré du N. 187. rayon EH (n). Donc , le rectangle des parties CF & FD , avec le quarré de la demi-différence FE , est égal au quarré N. 62. du rayon EH (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÈME.

270. *Si de deux lignes droites qui sont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence de ce même cercle , l'une le coupe & l'autre le touche ; le rectangle fait de la sécante & de sa partie extérieure , est égal au quarré de la tangente.*

Fig. 55 & 56. **L**E rectangle de la sécante AC* & de sa partie extérieure AD , est égal au quarré de la tangente AB.

La sécante AC passe par le centre du cercle , ou elle n'y passe point.

PREMIER CAS.

Fig. 55. *Lorsque la sécante AC* passe par le centre E.*

Const. Tirez du centre E au point de contact B, la ligne droite EB.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties AD & DC, & le point E est le milieu de la partie DC (n). Donc, N. 35. le rectangle des lignes AC & AD, avec le carré de la ligne ED, est égal au carré de la ligne EA. N. 190.

Mais, les carrés des lignes AB & EB sont aussi égaux au carré de la même ligne EA (n); puisque le triangle ABE est rectangle en B (n). N. 171. N. 246.

Donc, le rectangle précédent, avec le carré de la ligne ED, est égal aux carrés des lignes AB & EB (n). Par conséquent, N. 62. puisque les lignes ED & EB sont égales (n), ce rectangle est égal au carré de la ligne AB (n). N. 35. N. 64.

SECOND CAS.

Lorsque la sécante AC ne passe point par le centre E.* Fig. 56.

Const. Tirez du centre E aux points A, D & B, les lignes droites EA, ED & EB. Du même centre E, abaissez (n) la perpendiculaire EF à la corde DC. N. 96.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties au point D, & le point F est le milieu de la partie DC (n). Donc, le rectangle des lignes AC & AD, avec le

quarré de la ligne DF, est égal au quarré
 N. 190. de la ligne AF (n). Par conséquent, ce
 même rectangle, avec les quarrés des li-
 gnes DF & FE, est égal à ceux des lignes
 N. 63. AF & FE (n).

Mais, les quarrés des lignes DF & FE
 sont égaux au quarré de la ligne ED: &
 ceux des lignes AF & FE le sont au quarré
 N. 171. de la ligne EA (n); puisque les trian-
 gles DFE & AFE sont rectangles l'un &
 l'autre en F [C]. Donc, le rectangle pré-
 cédent, avec le quarré de la ligne ED,
 N. 61. est égal au quarré de la ligne EA (n).

Or, les quarrés des lignes AB & EB
 sont aussi égaux au quarré de la même
 N. 171. ligne EA (n); puisque le triangle ABE est
 N. 246. rectangle en B (n). Donc, le même rec-
 tangle précédent, avec le quarré de la li-
 gne ED, est égal aux quarrés des lignes
 N. 62. AB & EB (n). Par conséquent, puisque
 N. 35. les lignes ED & EB sont égales (n),
 ce rectangle est égal au quarré de la ligne
 N. 64. AB (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

271. Il suit de ce théorème, que si
*plusieurs lignes droites qui sont tirées d'un
 même point hors d'un cercle, à la circonfé-
 rence de ce même cercle, le coupent; les rec-*

tangles faits de ces lignes & de leurs parties extérieures, chacun de chacune, sont égaux.

Le rectangle de la sécante AB^* & de sa partie extérieure AE , est égal au rectangle de la sécante AC & de sa partie extérieure AF . Fig. 57.

Const. Du point A , tirez (n) la tangente AD au cercle X . N. 245.

Démonst. Le rectangle de la sécante AB & de sa partie extérieure AE ; & celui de la sécante AC & de sa partie extérieure AF , sont égaux l'un & l'autre au carré de la même tangente AD (n) . N. 270.
Donc, ils le sont aussi entr'eux (n) . N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

272. Il suit aussi de ce même théorème, que les tangentes à un cercle, qui sont tirées d'un même point, sont égales.

Les tangentes AB^* & AC sont égales. Fig. 58.

Const. Tirez du point A une sécante quelconque AD .

Démonst. Le carré de la tangente AB & celui de la tangente AC sont égaux l'un & l'autre, au rectangle de la sécante AD & de sa partie extérieure AE (n) . N. 270.

62. Donc, ils sont aussi égaux entr'eux (n). Par conséquent, ces tangentes sont égales.
Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

273. Enfin, il suit de ce corollaire, que d'un même point on ne peut tirer plus de deux tangentes au même cercle.

- Fig. 58. D'un point A*, on ne peut tirer plus de deux tangentes au cercle X.

Démonst. S'il étoit possible de tirer d'un point A plus de deux tangentes au cercle X, on pourroit, d'un point pris hors d'un cercle, tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales; puisque les tangentes qui sont tirées d'un même point N. 272. sont égales (n). Or, d'un point pris hors d'un cercle, on ne peut tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales N. 233. (n). Donc, il est impossible de tirer d'un point A plus de deux tangentes au cercle X.

Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

274. On peut se servir de ce théorème; de la manière suivante, pour mesurer le diamètre d'un cercle X* dans lequel on ne peut point entrer.

On prend hors du cercle proposé, un point

A à volonté. De ce point, on tire, soit avec des cordes, soit autrement, deux tangentes AB & AC à ce même cercle. On divise ensuite en deux parties égales BAD & CAD , l'angle BAC formé par ces deux tangentes (n). Enfin, on mesure l'une de ces mêmes tangentes, par exemple la tangente AB ; & la ligne AD , qui, si elle étoit prolongée, passeroit par le centre (n). N. 233.

Or, le rectangle de la sécante AE & de sa partie extérieure AD est connu; puisqu'il est égal (n) au quarré de la tangente AB N. 270. que l'on vient de mesurer. La partie AD est aussi connue, puisque l'on vient aussi de la mesurer. Ainsi, l'on divise par la valeur de cette partie, celle du quarré de cette tangente; & le quotient est la valeur de la sécante AE .

Enfin, lorsque l'on a trouvé cette valeur, on en retranche celle de cette même partie AD ; & le reste DE est la valeur du diamètre demandé.

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

275. *Si deux lignes droites , qui sont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence , sont telles que le rectangle fait de l'une & de sa partie extérieure, soit égal au quarré de l'autre , cette autre est tangente à ce cercle.*

Fig. 60. **S**I le rectangle de la sécante AC * & de sa partie extérieure AD , est égal au quarré de la ligne AB , cette ligne AB est tangente au cercle X.

N. 245. *Const.* Tirez du point A (n), la tangente AF au cercle X. Tirez aussi du même point A au centre E , la ligne droite AE.

Démonst. Le rectangle de la sécante AC & de sa partie extérieure AD , est égal au quarré de la tangente AF (n). Or , le même rectangle est aussi égal au quarré de la ligne AB [H]. Donc , le quarré de cette tangente & celui de cette ligne , sont égaux (n) ; & par conséquent , ces deux lignes sont égales.

Ainsi , dans les triangles AEB & AEF , le côté AB est égal au côté AF [D] , le côté

EB au côté EF (n), & le côté AE est N. 35. commun. Donc, l'angle B est égal à l'angle F (n); & par conséquent, puisque le N. 88. dernier est un angle droit (n), le premier N. 246. en est aussi un.

Or, puisque l'angle B est un angle droit, la ligne AB est perpendiculaire au rayon EB. Donc, puisqu'elle est tirée de l'extrémité B de ce rayon [C], elle est tangente au cercle X (n).

N. 242.

Par conséquent, C. Q. F. D.



LES



LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIEME.

EUCLIDE commence ce Livre par déterminer les conditions que des figures doivent avoir, afin que l'on puisse dire des unes, qu'elles sont inscrites dans les autres; & des autres, au contraire, qu'elles sont circonscrites aux premières. Il donne ensuite la manière d'inscrire dans le cercle & de circonscrire au cercle, un triangle équiangle à un autre; & de faire la même chose à l'égard de tous les polygones réguliers primitifs qu'il est possible d'y inscrire ou de lui circonscrire géométriquement. Enfin, il enseigne ce que l'on doit faire, tant pour inscrire le cercle dans un triangle & dans ces sortes de polygones, que pour le leur circonscrire.

D É F I N I T I O N S.

276. **O**N dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de cette autre.

Fig. 1. La figure $ABCD$ * est inscrite dans la figure $EFGH$.

277. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à une autre, lorsque chaque côté de cette figure passe par le sommet de chaque angle de cette autre.

Fig. 1. La figure $EFGH$ * est circonscrite à la figure $ABCD$.

278. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à un cercle, lorsque chaque côté de cette figure touche ce cercle.

Fig. 3. La figure $ABCD$ * est circonscrite au cercle X .

279. On dit d'un cercle, qu'il est *inscrit* dans une figure rectiligne, lorsqu'il touche chaque côté de cette figure.

Fig. 3. Le cercle X * est inscrit dans la figure $ABCD$.

280. On dit d'un cercle, qu'il est *circonscrit* à une figure rectiligne, lorsque la circonférence de ce cercle passe par le sommet de chaque angle de cette figure.

Le cercle X est circonscrit à la figure Fig. 2. ABCD.*

281. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *inscrite* dans un cercle, lorsqu'elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle.

Les lignes droites AB, BC, AD & Fig. 2. DC, sont inscrites dans le cercle X.*

282. Enfin, on dit que des figures sont *régulières*, lorsque tous leurs côtés sont égaux; & que tous leurs angles le sont aussi.



PROPOSITION I.

PROBLÈME.

283. *Inscrire dans un cercle donné, une ligne droite qui soit égale à une ligne droite donnée; pourvu cependant que cette ligne donnée, ne soit pas plus grande que le diamètre de ce cercle (n).*

N. 240.

Fig. 4. **I**L faut inscrire dans le cercle BECF*, une ligne droite qui soit égale à la ligne droite A.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point B à volonté. De ce point, pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne A, décrivez l'arc de cercle FEG. Enfin, tirez du même point B au point E, ou F, la ligne droite BE, ou BF. Elle sera la ligne demandée.

Démonst. Le rayon du cercle FEG est égal à la ligne A [c]. Or, la ligne BE est un rayon de ce cercle [c]. Donc, elle est
N. 35. égale à la ligne A (n). D'ailleurs, elle est
N. 281. inscrite dans le cercle BECF (n); puisqu'elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle [c].

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

284. *Inscrire dans un cercle donné, un triangle qui soit équiangle † à un triangle donné.*

IL faut inscrire dans le cercle EGH^* , Fig. 5. un triangle qui soit équiangle au triangle ABC .

Const. D'un point E , pris à volonté sur la circonférence, tirez (n) la tangente N . 243. DF au cercle proposé. Décrivez sur cette tangente (n) , l'angle DEG qui ait le point N . 119. de contact E pour sommet, & soit égal à l'angle A ; & l'angle FEH qui ait le même point E pour sommet, & soit égal à l'angle C . Enfin, tirez du point G au point H , la corde GH . Le triangle GEH que cette corde forme avec les cordes EG & EH , est le triangle demandé.

Démonst. L'angle H qui est dans le segment GHE , est égal à l'angle DEG du segment EKG (n) . Or, l'angle A est aussi N . 264. égal au même angle DEG $[C]$. Donc, l'angle H est égal à l'angle A (n) . N. 62.

† On appelle *triangles équiangles*, ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

Pareillement, l'angle G qui est dans le segment EGH , est égal à l'angle FEH N. 264. du segment EIH (n). Or, l'angle C est aussi égal au même angle FEH [c]. Donc, N. 62. l'angle G est égal à l'angle C (n).

Ainsi, le triangle GEH est équiangle N. 137. au triangle ABC (n). D'ailleurs, il est N. 276. inscrit dans le cercle EGH (n), puisque tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle [c].

Par conséquent, $C. Q. F. F.$

SCHOLIE.

285. On auroit pareillement résolu ce problème, en faisant l'angle DEG égal à l'angle C , ou à l'angle B ; & l'angle FEH égal à l'angle A , ou à l'angle B .

C'est sur ce problème & sur la quatrième proposition du sixième livre, que toute la Trigonométrie devoit être fondée.



PROPOSITION III.

PROBLÈME.

286. Circonscrire à un cercle donné, un triangle qui soit équiangle à un triangle donné.

IL faut circonscrire au cercle DEF^* , Fig. 6. un triangle qui soit équiangle au triangle ABC .

Const. Prolongez indéfiniment de part & d'autre, l'un des côtés du triangle ABC , par exemple le côté AC . Tirez le rayon GF , à volonté. Décrivez sur ce rayon (n) l'angle FGE qui ait le centre N . 119. G pour sommet, & soit égal à l'angle BCM ; & l'angle FGD qui ait aussi le même centre G pour sommet, & soit égal à l'angle BAL . Enfin (n), élevez du point N . 95. F , la perpendiculaire HK au rayon GF ; du point E , la perpendiculaire IK au rayon GE ; & du point D , la perpendiculaire IH au rayon GD . Ces perpendiculaires forment un triangle HIK , qui est le triangle demandé.

Démonst. Les angles GFK & $G EK$ sont deux angles droits $[C]$. Ainsi, puisque la somme de tous les angles d'un qua-

N. 140. drilatere est égale à celle de quatre angles droits (n), la somme des angles FGE & K est égale à celle de deux angles droits.

Mais, la somme des angles BCM & BCA, est aussi égale à celle de deux angles droits (n). Donc, la somme des angles FGE & K est égale à celle des angles BCM & BCA (n). Par conséquent, puisque les angles FGE & BCM sont égaux [C], N. 64. les angles K. & BCA le sont aussi (n).

Or, on démontre de la même manière, que l'angle H est égal à l'angle B A C. Ainsi, le triangle HIK est équiangle au N. 137. triangle ABC (n). D'ailleurs, il est circonscrit au cercle DEF (n), puisque tous N. 278. les côtés touchent ce cercle (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

287. *Inscrire un cercle, dans un triangle donné.*

IL faut inscrire un cercle dans le triangle ABC *.

N. 90. *Const.* Divisez (n) deux des angles du triangle proposé, par exemple, les angles A & C, chacun en deux parties égales

DAB & DAC, DCB & DCA. Du point D, auquel les lignes DA & DC se rencontrent, abaissez (n) la perpendiculaire DG^{N. 96.} au côté AC. Enfin, du même point D, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez le cercle EGF: il fera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Abaissez (n) du^{N. 96.} même point D, la perpendiculaire DE au côté AB; & la perpendiculaire DF au côté BC.

Démonst. Dans les triangles DAE & DAG, qui sont rectangles l'un en E & l'autre en G, l'angle DAB est égal à l'angle DAC [c], & le côté DA est commun. Ainsi, les perpendiculaires DE & DG sont égales (n).

N. 123.

Or, on démontre de la même manière, l'égalité des perpendiculaires DF & DG. Donc, puisque [c] cette dernière est un rayon du cercle EGF, les deux autres DE & DF sont aussi des rayons du même cercle (n).

N. 33.

Mais [c], tous les côtés du triangle ABC passent par les extrémités G, E & F de ces rayons; & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc, le cercle EGF touche tous les côtés de ce triangle (n);^{N. 242.} & par conséquent, il y est inscrit (n).^{N. 279.}

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

288. *Circonscrire un cercle , à un triangle donné.*

IL faut circonscrire un cercle , au triangle ABC *.

Fig. 8. N. 93. *Const.* Divisez (n) deux des côtés du triangle proposé , par exemple , les côtés AB & AC , chacun en deux parties égales AD & DB , AE & EC. Du point D ,
N. 95. élevez (n) la perpendiculaire DF au côté AB ; & du point E , la perpendiculaire EF au côté AC. Du point F , auquel ces perpendiculaires se rencontrent , tirez au point A la ligne droite FA. Enfin , du même point F pris pour centre , & avec cette ligne FA prise pour rayon , décrivez le cercle AGC : il sera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points B & C , les lignes droites FB & FC.

Démonst. Dans les triangles BDF & ADF , qui sont rectangles l'un & l'autre en D [c] , le côté DB est égal au côté DA [c] , & le côté DF est commun.

Ainsi, le côté FB est égal au côté FA (n). N. 82.

Or, on démontre de la même manière, l'égalité des lignes FC & FA. Donc, puisque [C] cette dernière est un rayon du cercle AGC, les deux autres FB & FC sont aussi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais [C], chaque angle A, B & C, du triangle ABC, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc, la circonférence du cercle AGC passe par les sommets de tous les angles de ce triangle (n); & par conséquent, ce cercle est circonscrit à ce triangle (n). N. 35.
N. 280.

Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

289. *On propose quelquefois ce problème, de la manière suivante: Faire passer la circonférence d'un cercle par trois points donnés A*, B & C; pourvu cependant* Fig. 8.
que ces trois points ne soient pas dans une même ligne droite.

Pour le résoudre, on joint les trois points donnés, par des lignes droites AB, AC & BC; & l'on a un triangle ABC, auquel on circonscrit un cercle (n). N. 288.



PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

290. *Inscrire un quarré, dans un cercle donné.*

IL faut inscrire un quarré dans le cercle
Fig. 9. FGH*..

Const. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 95. lonté. Elevez (n) un autre diametre BD, perpendiculaire à ce diametre AC. Tirez du point A aux points B & D, les lignes droites AB & AD; & du point C aux mêmes points B & D, les lignes droites CB & CD. Le quadrilatere ABCD que ces lignes forment, est le quarré demandé.

Démonst. Les angles AEB, BEC, CED, &c. qui ont chacun leur sommet
N. 19. au centre E, sont égaux (n). Donc, les arcs AFB, BGC, CHD, &c. le sont
N. 256. aussi (n); & par conséquent, les cordes
N. 260. AB, BC, CD, &c. sont égales (n).

De plus, les angles A, B, C, &c.
N. 263. sont des angles droits (n); puisque [C] ils sont inscrits chacun dans un demi-cercle. Donc, le quadrilatere ABCD a tous ses côtés égaux, & tous ses angles droits; &
N. 50. par conséquent, il est quarré (n).

Or, ce quarré est inscrit dans le cercle FGH (n); puisque tous ses angles ont N. 276. leurs sommets dans la circonférence de ce cercle [C].

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

291. Il suit de ce problème: Premièrement, que pour inscrire dans le cercle un octogone régulier, il faut commencer par y inscrire un quarré: & diviser ensuite en deux parties égales (n), chaque arc AFB^* , N. 261. BGC , &c, afin d'avoir des arcs AF , FB , BG , &c. qui soient chacun la huitieme Fig. 9. partie de la circonférence.

Secondement, que pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 16 côtés, il faut commencer par y inscrire un octogone régulier: & diviser ensuite (n) cha- N. 261. que arc AF^* , FB , &c. en deux parties Fig. 9. égales; afin d'avoir des arcs qui soient chacun la seizieme partie de la circonférence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 32 côtés, de 64 côtés, &c.



PROPOSITION VII.

PROBLÈME.

292. *Circonscrire un quarré, à un cercle donné.*

IL faut circonscrire un quarré au cercle
Fig. 10. ABCD *.

Const. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 95 lonté. Elevez (n) un autre diametre BD
perpendiculaire à ce diametre AC. Elevez
N. 95. aussi (n) des points A & C, les perpen-
diculaires EH & FG au même diametre
AC; & des points B & D, les perpen-
diculaires EF & HG au diametre BD.
Le quadilatere HF que ces perpendiculaires
forment, est le quarré demandé.

Démonst. Les lignes EH, BD & FG,
N. 129. sont paralleles (n); puisqu'elles sont per-
pendiculaires chacune à la même ligne
AC [c]: & les lignes EF, AC & HG,
N. 129. sont aussi paralleles (n), puisqu'elles sont
aussi perpendiculaires chacune à la même
ligne BD [c].

Ainsi, *Premièrement.* Les quadrilateres
N. 57. HB & AF sont parallélogrammes (n).
Donc, les côtés EH & BD sont égaux,

& les côtés EF & AC le sont aussi (n). N. 143.
 Par conséquent, puisque le côté BD est
 égal au côté AC (n), le côté EH l'est au
 côté EF (n). N. 35.
 N. 62.

Secondement. Le quadrilatere AB est
 aussi parallélogramme (n). Donc, puisque N. 57.
 l'angle AIB est un angle droit (n), l'angle N. 21.
 E en est aussi un (n). N. 143.

Troisièmement. Enfin, le quadrilatere
 HF est encore parallélogramme (n). Donc, N. 57.
 puisque [D] il a deux côtés de suite égaux
 EH & EF, & un angle droit E, il est
 quarré (n). N. 146.

Or, ce quarré est circonscrit au cercle
 ABCD (n); puisque tous ses côtés tou- N. 278.
 chent ce cercle (n). N. 242.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION VIII.

PROBLÈME.

293. *Inscrire un cercle, dans un quarré
 donné.*

IL faut inscrire un cercle, dans le quarré
 HF*.

Fig. 10.

Const. Tirez les diagonales EG & HF.
 Du point I, auquel ces diagonales se cou-
 pent, abaissez (n), la perpendiculaire ID N. 96.

au côté HG. Enfin , du même point I , pris pour centre , & avec cette perpendiculaire prise pour rayon , décrivez le cercle DCBA ; il sera le cercle demandé.

N. 96. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point I , les perpendiculaires IC , IB & IA aux côtés FG , EF & EH , chacune à chacun.

Démonst. Le quadrilatere DC est quarré
N. 186. (n). Ainsi , les côtés IC & ID sont égaux
N. 50. (n).

Or , on démontre de la même maniere , l'égalité des autres perpendiculaires IC & IB , IB & IA. Donc , puisque [C] la perpendiculaire ID est un rayon du cercle DCBA , ces autres perpendiculaires sont
N. 35. aussi des rayons du même cercle (n).

Mais [C] , tous les côtés du quarré HF passent par les extrémités D , C , &c. de ces rayons ; & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc , le cercle DCBA
N. 242. touche tous les côtés de ce quarré (n) ; &
N. 279. par conséquent , il y est inscrit (n).

Donc , C. Q. F. F.



PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

294. Circonscrire un cercle, à un quarré donné.

IL faut circonscrire un cercle au quarré ABCD*.

Fig. 9.

Const. Tirez les diagonales AC & BD. Du point E, auquel ces diagonales se coupent, pris pour centre, & avec la ligne EA, prise pour rayon, décrivez le cercle FGH; il sera le cercle demandé.

Démonst. Dans le triangle AEB, les angles CAB & DBA sont chacun la moitié d'un angle droit (n); puisque les triangles ABC & BAD sont rectangles & isosceles (n). Ainsi, le côté EB est égal au côté EA (n).

N. 138.
N. 50.
N. 86.

Or, on démontre de la même manière l'égalité des lignes EB & EC, EC & ED. Donc, puisque la ligne EA est un rayon du cercle FGH [c], ces autres lignes sont aussi des rayons du même cercle (n).

N. 35.

Mais, chaque angle A; B, &c. du quarré ABCD, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons [c]. Donc, la circonférence du cercle FGH passe par les

sommets de tous les angles de ce carré
 N. 35. (n) ; & par conséquent , ce cercle est
 N. 280. circonscrit à ce carré (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

295. *Décrire sur une ligne droite donnée , un triangle isoscele , dont chacun des angles égaux , soit double de son autre angle.*

Fig. 11. **I**L faut décrire sur la ligne droite AB* un triangle isoscele , dont chacun des angles égaux soit double de son autre angle.

N. 203. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux parties AC & CB , qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de sa petite partie CB , soit égal au carré de sa grande partie AC. Du point A , pris pour centre , & avec la même ligne AB prise pour rayon , décrivez un arc de cercle BDG , indéfini. Du point B pris pour centre , & avec la partie AC prise pour rayon , décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent à un point D. Enfin , tirez de ce point aux points A & B , les lignes droites DA & DB. Le triangle BAD , que ces lignes

forment avec la ligne AB, est le triangle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point C au point D, la ligne droite CD; & (n) circonscrivez le cercle ACDE au N. 288. triangle ACD.

Démonst. Le rectangle de la ligne AB & de sa partie CB, est égal au carré de la partie AC [C]. Donc, il est aussi égal à celui de la ligne BD; puisque cette ligne & cette dernière partie sont égales [C]. Ainsi, la ligne BD est tangente au cercle ACDE (n). Donc, l'angle CDB est N. 275. l'angle du segment CFD (n). Par consé- N. 221. quent, il est égal à l'angle A, dans le segment CED (n). N. 264.

Or, l'angle DCB, qui est extérieur au triangle ACD, est égal (n) à la somme N. 135. des angles intérieurs CDA & A qui lui sont opposés. Donc (n), il est aussi N. 61. égal à celle des angles CDA & CDB, (n); & par conséquent, à l'angle BDA N. 72. (n).

Mais, l'angle B est aussi égal au même angle BDA (n), puisque les côtés AD & N. 84. AB du triangle BAD sont égaux (n). N. 35. Donc, l'angle DCB est égal à l'angle B (n); & par conséquent, les côtés BD & N. 62. CD du triangle BDC sont égaux (n). N. 86.

Or, puisque le côté BD qui est égal au

côté AC [C], l'est aussi au côté CD, les côtés AC & CD du triangle ACD sont
 N. 62. égaux (n). Donc, l'angle CDA est aussi
 N. 84. égal à l'angle A (n).

Enfin, puisque les angles CDA & CDB sont égaux chacun au même angle A; l'angle BDA, qui est la somme de ces deux premiers angles, est double de l'angle A.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

296. Il suit de ce problème, que si l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isoscele, est la moitié de chacun des deux autres angles; il est les deux cinquièmes d'un angle droit.

Fig. 12. Dans le triangle BAC * l'angle A qui est la moitié de chacun des deux autres angles ABC & ACB, est les deux cinquièmes d'un angle droit.

N. 90. *Const.* Divisez (n) en deux parties égales, chaque angle ABC & ACB.

Démonst. Les cinq angles A, ABD, CBD, ACE & BCE, sont égaux [C]. Ainsi, ils sont chacun la cinquième partie de la somme des trois angles du triangle BAC. Mais, cette somme est égale à
 N. 136. celle de deux angles droits (n). Donc,

chaque angle A , ABD , &c. est la cinquieme partie de la somme de deux angles droits; & par conséquent, les deux cinquiemes d'un angle droit.

Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

297. Si l'on vouloit que la ligne donnée AB^* fût le côté adjacent aux angles Fig. 11. égaux du triangle demandé, on commenceroit par décrire sur cette ligne le triangle BAD , de la même maniere dont on vient de le faire. On décriroit ensuite sur cette même ligne (n) un angle qui fût égal à l'an- N. 119. gle B , & qui eût le point A pour sommet. Enfin, on prolongeroit le côté de cet angle & le côté BD de l'angle B , jusqu'à ce qu'ils se rencontraissent. Le triangle que ces côtés prolongés formeroient avec la ligne AB , seroit le triangle demandé.



PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

298. *Inscrire dans un cercle donné, un pentagone régulier.*

Fig. 13. **I**L faut inscrire dans le cercle ACE * un pentagone régulier.

N. 295. *Const.* Décrivez (n) sur une ligne droite GF prise à volonté, le triangle isoscele FGH, dont chaque angle F & H, soit

N. 284. double de l'angle G. Inscrivez (n) dans le cercle ACE, le triangle EBD qui soit

N. 90. équiangle à ce triangle FGH. Divisez (n) chaque angle BED & BDE en deux parties égales BEC & CED, BDA & ADE †.

Enfin, tirez du point B aux points A & C, les lignes droites BA & BC; du point E aux points A & D, les lignes droites EA & ED; & du point C au point D, la ligne droite CD. Le polygone ABCDE que ces lignes forment, est le pentagone demandé.

Démonst. Tous les angles BEC, CED, EBD, ADE & BDA, sont égaux, puis-

† Dans la pratique, il suffit de faire les arcs EA & DC égaux chacun à l'arc ED; & de tirer ensuite les lignes BA, BC, &c.

que chaque angle BED & BDE est double de l'angle EBD [c]. Donc, tous les arcs BC, CD, DE, EA & AB, sont aussi égaux (n). Par conséquent, toutes les cordes BC, CD, &c. sont égales (n). N. 255. N. 260.

Mais, puisque tous les arcs BC, CD, &c. sont égaux, les arcs AEDC, BAED, CBAE, &c. sur lesquels s'appuient les angles ABC, BCD, CDE, &c. le sont aussi. Par conséquent, tous ces angles sont égaux (n).

Ainsi, tous les côtés du pentagone ABCDE sont égaux, & tous ses angles le sont aussi. Donc, ce pentagone est régulier. D'ailleurs, il est inscrit dans le cercle ACE (n), puisque tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle [c]. N. 257. N. 276.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

299. Il suit de ce problème : Premièrement, que *pour inscrire dans le cercle un décagone régulier, il faut commencer par y inscrire un pentagone régulier : & diviser ensuite chaque arc AB*, BC, &c. en deux parties égales (n); afin d'avoir des arcs qui soient chacun la dixième partie de la circonférence.* Fig. 13. N. 261.

Secondement, que *pour inscrire dans*

le cercle un polygone régulier de 20 côtés, il faut commencer par y inscrire un décagone régulier : & diviser ensuite en deux parties égales (n), chaque arc de ce décagone ; afin d'avoir des arcs qui soient chacun la vingtième partie de la circonférence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 40 côtés, de 80 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

300. Il suit aussi de la démonstration de ce même problème, que chaque angle d'un pentagone régulier est les six cinquièmes d'un angle droit ; & par conséquent de 108 degrés.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

301. Circoncrire à un cercle donné, un pentagone régulier.

Fig. 14. IL faut circoncrire au cercle ACD*, un pentagone régulier.

N. 298. Const. Inscrivez (n), dans le cercle ACD, le pentagone régulier ABCDE. Tirez ensuite du centre L à chaque angle A,

A, B, C, &c. les rayons LA, LB, LC, &c. Enfin (n) élevez du point A, ^{N. 95.} la perpendiculaire KF au rayon LA; du point B, la perpendiculaire FG au rayon LB; du point C, la perpendiculaire GH au rayon LC; & ainsi de suite. Ces perpendiculaires forment un polygone FGHIK, qui est le pentagone demandé.

Pour la démonstration. Tirez du centre L à chaque angle F, G, H, &c. les lignes droites LF, LG, LH, &c.

Démonst. Premièrement. Les lignes FA & FB sont perpendiculaires aux rayons LA & LB, & élevées des extrémités A & B de ces mêmes rayons. Donc, elles sont tangentes au cercle ACE (n). Par con- ^{N. 242.} séquent, puisqu'elles sont tirées du même point F, elles sont égales (n). Et par des ^{N. 272.} raisons pareilles, les lignes GB & GC, HC & HD, &c. le sont aussi.

Ainsi, dans les triangles LAF & LBF, le côté LA est égal au côté LB (n), le côté ^{N. 35.} LF est commun, & le côté FA est égal au côté FB [D]. Donc, les angles FLA & FLB sont égaux (n); & par consé- ^{N. 38.} quent, l'angle FLB est la moitié de l'angle ALB.

Or, on démontre de la même manière, que l'angle GLB est la moitié de l'angle CLB. Donc, puisque les angles ALB & CLB qui s'appuient sur les arcs égaux AB

N. 258. & CB, sont égaux (n), les angles FLB & 113. 68. GLB le sont aussi (n).

Ainsi, dans les triangles LBF & LBG qui ont le côté LB de commun, & sont rectangles l'un & l'autre en B [C], l'angle FLB est égal à l'angle GLB. Donc, les côtés N. 123. FB & GB sont égaux (n). Et par des raisons pareilles, les côtés GC & HC, HD & ID, &c. le sont aussi.

Donc, toutes les lignes FA, FB, GB, GC, &c. sont égales. Par conséquent, tous les côtés KF, FG, GH, &c. sont égaux.

Secondement. Les angles LFA, & N. 88. LFB sont égaux (n); puisque les triangles LAF & LBF ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun [D]. Les angles LFB & N. 137. LGB sont aussi égaux (n); puisque les triangles LBF & LBG, qui sont rectangles l'un & l'autre en B [C], ont l'angle FLB égal à l'angle GLB [D]. Les angles N. 88. LGB & LGC sont encore égaux (n); puisque les triangles LBG & LCG ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun [D], & ainsi de suite. Donc, tous les angles LFA, LFB, LGB, LGC, &c. sont égaux. Par conséquent, tous les angles KFG, FGH, GHI, &c. le sont aussi.

Ainsi, tous les côtés du pentagone FGHIK sont égaux; & tous ses angles le

sont aussi. Donc, ce pentagone est régulier. D'ailleurs, il est circonscrit au cercle ACD (n); puisque tous ses côtés touchent N. 278. ce cercle (n). N. 242.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

302. Il suit de la construction de ce problème, que *pour circonscrire à un cercle un polygone régulier quelconque, il faut commencer par y en inscrire un semblable à celui que l'on veut lui circonscrire. Ensuite, du centre de ce cercle, on tire des rayons à chaque angle de ce polygone. Enfin, des extrémités de ces rayons, on élève (n) des N. 95. perpendiculaires à ces mêmes rayons, chacune à chacun.*

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

303. *Inscrire un cercle, dans un pentagone régulier.*

IL faut inscrire un cercle dans le pentagone ABCDE *.

Const. Divisez (n) deux des angles du N. 90. pentagone proposé, par exemple, les an-

Fig. 15.

N ij

gles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se rencontrent, abaissez (n) la perpendiculaire FG au côté AB. Enfin, du même point F, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez le cercle GIL; il sera le cercle demandé.

N. 96. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point F, la perpendiculaire FH au côté BC; la perpendiculaire FI au côté CD; & ainsi de suite. Du même point F, tirez aux angles C, D & E, les lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Premièrement. Dans les triangles BFH & BFG, qui ont le côté BF de commun, & sont rectangles l'un en H & l'autre en G [c], l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c]. Donc, les perpendiculaires FH & FG sont égales (n).

Secondement. Dans les triangles BFA & BFC, l'angle FBA est égal à l'angle FBC [c], le côté BA au côté BC [H], & le côté BF est commun. Donc, les angles FAB & FCB sont égaux (n).

Mais, les angles EAB & DCB sont aussi égaux [H]. Donc, puisque l'angle FAB est la moitié du premier [c], l'angle FCB est la moitié du second (n). Par conséquent, les angles FCB & FCD sont égaux.

Et par des raisons pareilles , les angles FDC & FDE , FED & FEA le sont aussi.

Or , après avoir ainsi établi l'égalité de ces angles , on démontre celle des perpendiculaires FH & FI , FI & FK , &c. de la même manière dont on vient de démontrer l'égalité des perpendiculaires FH & FG. Donc , puisque cette dernière est un rayon du cercle GIL [C] , les autres sont aussi des rayons du même cercle (n).

N. 35.

Mais , tous les côtés du pentagone ABCDE passent par les extrémités G, H, I, &c. de ces rayons , & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons [C]. Donc , le cercle GIL touche tous les côtés de ce pentagone (n). Par conséquent , il y est inscrit (n).

N. 243.

N. 279.

Donc , C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

304. Il suit de la construction de ce problème , que *pour inscrire un cercle dans un polygone régulier quelconque , il faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en inscrire un dans un pentagone régulier.*



PROPOSITION XIV.

PROBLÈME.

305. *Circonscrire un cercle à un pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un cercle au pentagone
Fig. 16. ABCDE *.

N. 90. *Const.* Divisez (n) deux des angles du pentagone proposé, par exemple, les angles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne FA, prise pour rayon, décrivez le cercle ACE; il fera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points C, D & E, les lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Dans le triangle AFB, les
N. 68. angles FAB & FBA sont égaux (n); puisque [C] ils sont les moitiés, l'un de l'angle EAB, & l'autre de l'angle ABC, qui sont égaux [H]. Donc, les lignes FB & FA sont
N. 86. égales (n).

Or, après avoir établi, de même qu'au n° 303 †, l'égalité des angles FCB &

† Lisez sur la figure 16, le secondement de la démonstration du n° 303.

FCD, FDC & FDE, &c. on démontre celle des lignes FB & FC, FC & FD, &c. de la même manière dont on vient de démontrer l'égalité des lignes FB & FA. Donc, puisque cette dernière est un rayon du cercle ACE [c], les autres sont aussi des rayons du même cercle (n). N. 35.

Mais, chaque angle A, B, &c. du pentagone ABCDE a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons [c]. Donc, la circonférence du cercle ACE passe par les sommets de tous les angles de ce pentagone (n). Par conséquent, ce cercle est circonscrit à ce pentagone (n). N. 35.
N. 280.

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

306. Il suit de ce problème, que *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque, il faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en circonscrire un à un pentagone régulier.*



PROPOSITION XV.

PROBLÈME.

307. *Inscrire dans un cercle donné, un exagone régulier.*

Fig. 17. **I**L faut inscrire dans le cercle ACE*, un exagone régulier.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point A à volonté. De ce point pris pour centre, & avec un rayon égal à celui de ce même cercle, décrivez deux arcs qui coupent la circonférence, l'un à un point B, & l'autre à un point F. Des points B, A & F, tirez par le centre G, les lignes droites BE, AD & FC. Enfin, tirez du point A aux points B & F, les lignes droites AB & AF; du point C aux points B & D, les lignes droites CB & CD; & du point E, aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le polygone ABCDEF que ces lignes forment, est l'exagone demandé.

Démonst. Le triangle AGB est équilatéral [C]. Ainsi, l'angle AGB est les
N. 139. deux tiers d'un angle droit (n); & par la même raison, il en est de même de l'an-

gle AGF. Donc , puisque les trois angles AGB , AGF & FGE , valent ensemble deux angles droits (n) , l'angle FGE est N. 97. aussi les deux tiers d'un angle droit.

Mais (n) , l'angle DGE est égal à l'an- N. 101. gle AGB ; l'angle DGC à l'angle AGF ; & l'angle BGC à l'angle FGE. Donc , tous les angles qui ont leur sommet au centre G , sont égaux (n). Ainsi , tous les arcs N. 62. AB , BC , CD , &c. le sont aussi (n). N. 256. Par conséquent , toutes les cordes AB , BC , CD , &c. sont égales (n). N. 260.

Mais , puisque tous les arcs AB , BC , &c. sont égaux , les arcs AEC , BFD , CAE , &c. sur lesquels s'appuient les angles ABC , BCD , CDE , &c. le sont aussi. Par conséquent , tous ces angles sont égaux (n). N. 257.

Ainsi , tous les côtés de l'exagone ABCDEF sont égaux ; & tous ses angles le sont aussi. Donc , cet exagone est régulier. D'ailleurs , il est inscrit dans le cercle ACE (n) ; puisque [C] tous ses angles N. 276. ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle.

Par conséquent C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

308. Il suit de ce problème : Premièrement , que *pour inscrire dans le cercle un triangle équilatéral , il faut commencer par*

N. v

Fig. 17. y inscrire un exagone régulier $ABCDEF^*$:
 & tirer ensuite des lignes droites, du point
 A au point C , du point C au point E , &
 du point E au point A .

Secondement, que pour inscrire dans
 le cercle un dodécagone régulier, il faut
 commencer de même par y inscrire un exa-
 gone régulier : & diviser ensuite chaque
 arc AB , BC , &c. en deux parties égales
 N. 261. (n) ; afin d'avoir des arcs qui soient
 chacun la douzième partie de la circonfé-
 rence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le
 cercle les polygones réguliers de 24 côtés, de
 48 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

309. Il suit de la démonstration de ce
 même problème, que chaque angle d'un
 exagone régulier, est les quatre tiers d'un
 angle droit ; & par conséquent, de 120
 degrés.

COROLLAIRE III.

310. Il suit encore de la démonstration
 de ce même problème, que le côté de
 l'exagone régulier, est égal au rayon du
 cercle dans lequel cet exagone est inscrit.

COROLLAIRE IV.

311. Enfin, il suit de ce corollaire, que pour inscrire dans le cercle un exagone régulier, il suffit de prendre avec un compas la grandeur du rayon ; & de la porter six fois sur la circonférence.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

312. Incrire dans un cercle donné, un pentédécagone régulier.

IL faut inscrire dans le cercle DEG*, Fig. 18. un pentédécagone régulier.

Const. Inscrivez dans le cercle proposé, le triangle équilatéral ABC (n) ; & le N. 308. pentagone régulier DBEFG (n). L'arc N. 298. AG, qui se trouve intercepté entre l'angle A du triangle équilatéral & l'angle G du pentagone, est la quinzième partie de la circonférence.

Démonst. L'arc BDA est le tiers de la circonférence [C] ; & l'arc BDAG en est les deux cinquièmes [C]. Or, $\frac{1}{3}$ vaut $\frac{5}{15}$;

N vj

& $\frac{2}{5}$ valent $\frac{6}{15}$. Donc, l'arc AG est un quinzième.

Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

313. Il suit de ce problème, que pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 30 côtés, il faut commencer par y inscrire un pentédécagone régulier : & diviser N. 261. ensuite (n) l'arc AG, en deux parties égales ; afin d'avoir des arcs qui soient chacun la trentième partie de la circonférence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 60 côtés, de 120 côtés, &c.

SCHOLIE.

314. Il faut remarquer que l'on ne peut inscrire géométriquement dans le cercle, aucun polygone régulier différent de ceux dont il est parlé dans ce Livre.

On peut aussi faire les remarques suivantes.

Si l'on porte le rayon sur le quart de la circonférence, le reste est l'arc du dodécagone.

Et si l'on porte le rayon sur l'arc du pentagone, le reste est l'arc du polygone de 30 côtés.

Si l'on porte le côté du pentagone sur le quart de la circonférence, le reste est l'arc du polygone de 20 côtés.

Mais si l'on porte le côté du pentagone deux fois sur la demi-circonférence, le reste est l'arc du décagone.

Si l'on porte le côté du décagone sur l'arc de l'exagone, le reste est l'arc du pentédécagone.

Mais si l'on porte le côté de l'octogone sur l'arc de l'exagone, le reste est l'arc du polygone de 24 côtés.

Et ainsi de suite, pour trouver géométriquement plusieurs arcs d'un certain nombre de degrés. Mais on ne parviendra jamais, ni par ceete voie, ni vraisemblablement par aucune autre, à trouver géométriquement les arcs de 1 degré, de 2 degrés, de 4 degrés; & ainsi de suite, en doublant.







LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIEME.

JUSQU'ICI on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes. Il s'agit à présent de comparer entr'elles les premières ; de faire la même chose à l'égard des dernières ; & de déterminer l'égalité, ou l'inégalité, des rapports qui résultent de ces comparaisons. Mais, il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance exacte des rapports en général ; & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide destine ce cinquieme Livre. Il le commence par les définitions des termes qui sont en usage dans les comparaisons. Il établit ensuite les principes des rapports ; compare ces rapports

les uns aux autres ; donne des regles pour connoître leur égalité, ou leurs différentes sortes d'inégalités ; & démontre les propriétés de ceux qui sont égaux.

Ce Livre renferme les regles d'une excellente logique ; & la matiere qui y est traitée fait l'ame de la Géométrie. Mais il est si obscur dans son Auteur, si chargé de propositions inutiles, & en même temps si défectueux par le nombre de propositions nécessaires qui ne s'y trouvent point, que l'on a été obligé d'y faire les changemens les plus considérables.

Ainsi, l'on en a supprimé l'inutile ; & l'on y a ajouté tout ce qui est nécessaire pour en faire un traité complet des rapports. Par conséquent, l'ordre dans lequel les propositions y sont rangées, n'est plus celui qu'Euclide a suivi. Mais, comme cet Auteur est cité par tous les Géometres antérieurs à l'année 1730, on a eu soin, à chaque proposition que l'on a conservée, d'indiquer par une note la date originale.

Enfin, on l'a terminé par plusieurs questions, afin de donner quelque idée de l'usage des proportions.



NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

COMME on ne traite ici des rapports qu'en général, on s'y sert des lettres de l'alphabet pour représenter les quantités en général. Ainsi, ces lettres a, b, c, d , &c. signifient également des nombres, des lignes, des surfaces, des corps, des sons, des temps, des vitesses, &c. Par conséquent, on pourra toujours leur substituer celles de ces quantités que l'on voudra.

Et pour s'exprimer de la manière la plus courte qu'il est possible, on se sert de ce signe $+$, pour représenter ce mot, plus; & de cet autre signe $-$, pour tenir lieu de cet autre mot, moins. Ainsi, cette expression $a + b$, signifie la somme des quantités qui sont représentées par les lettres a & b : & celle-ci, $a - b$, signifie leur différence. Le premier signe est celui de l'addition; & le dernier, celui de la soustraction.

Par exemple, si a représente le nombre 18, & b le nombre 12, la première expression signifie, 18 plus 12; c'est-à-dire, 30: & la seconde, 18 moins 12; c'est-à-dire, 6.

Mais, pour indiquer le produit d'une certaine quantité représentée par une lettre quelconque a , & multipliée par une autre

quantité représentée aussi par une autre lettre quelconque b ; on écrit de suite ces deux lettres. Ainsi, cette expression ab , indique le produit de la quantité représentée par a , & multipliée par la quantité représentée par b .

Par exemple, si a représente le nombre 18, & b le nombre 12 ; l'expression ab tient lieu de celle-ci, 18 fois 12 ; c'est-à-dire, 216.

Enfin, pour indiquer le quotient d'une certaine quantité représentée par une lettre quelconque a , & divisée par une autre quantité représentée aussi par une autre lettre quelconque b ; on pose sur une petite ligne la lettre qui représente le dividende, & l'on met au dessous celle qui représente le divi-

seur. Ainsi, cette expression $\frac{a}{b}$ indique le quotient de la quantité représentée par a , & divisée par la quantité représentée par b .

Par exemple, si a représente le nombre 18, & b le nombre 12, l'expression $\frac{a}{b}$ tient lieu de cette fraction, $\frac{18}{12}$; c'est-à-dire, du quotient de 18 divisés par 12, lequel est $1\frac{1}{2}$.



DES RAPPORTS.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

315. **O**N nomme *Rapport*, ou *Raison*, ce qu'une quantité est à l'égard d'une autre.

Par exemple , le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 4 pieds , est d'être grande à l'égard de cette ligne de 4 pieds : celui d'une ligne de 12 pieds à une de 48 pieds , est d'être petite à l'égard de cette ligne de 48 pieds : enfin , celui d'une ligne de 12 pieds à une autre ligne aussi de 12 pieds , est d'être égale à cette dernière ligne.

Mais , on ne juge cette ligne de 12 pieds grande par rapport à celle de 4 pieds , que parce qu'on la considère , ou comme la surpassant ; ou comme la contenant plus d'une fois. On ne juge cette même ligne de 12 pieds petite par rapport à celle de 48 pieds , que parce qu'on la considère , ou comme en différant ; ou comme ne la contenant point une fois. Enfin , on ne juge cette ligne de 12 pieds égale à cette autre ligne aussi de 12 pieds , que parce qu'on la considère , ou comme n'en différant point ; ou comme la contenant une fois précisément.

Ainsi , une quantité est grande , ou petite , à l'égard d'une autre , ou égale à une autre , en deux manières. Par conséquent , il y a deux sortes de rapports.

316. Lorsque l'on compare une quantité à une autre , en considérant la *maniere* † dont celle que l'on compare *differe* de celle à laquelle on la compare ; le rapport qui est entre ces deux quantités , se nomme , *rapport arithmétique*.

Par exemple , si l'on considère qu'une ligne de 18 pieds est plus grande qu'une ligne de 6 pieds , parce qu'elle la surpasse de 12 pieds ; qu'une ligne de 25 pieds est égale à une autre ligne aussi de 25 pieds , parce qu'elle n'en differe point ; enfin , qu'une ligne de 9 pieds est plus petite qu'une ligne de 15 pieds , parce qu'elle en differe de 6 pieds ; tous ces rapports sont arithmétiques.

317. Mais , lorsque l'on compare une quantité à une autre , en considérant la *maniere* dont celle que l'on compare *contient* celle à laquelle on la compare ; le rapport qui est entre ces deux quantités se nomme

† Je dis la *maniere* ; parce que la différence de 12 à 14 , n'est point la même que celle de 12 à 10. La première est *positive* ; l'autre est *negative* ; & se nomme ordinairement , *excès*.

rapport géométrique, ou seulement, *rapport*.

Par exemple, si l'on considère qu'une ligne de 18 pieds est plus grande qu'une ligne de 6 pieds, parce qu'elle la contient 3 fois; qu'une ligne de 25 pieds est égale à une autre ligne aussi de 25 pieds, parce qu'elle la contient une fois précisément; enfin, qu'une ligne de 9 pieds est plus petite qu'une ligne de 15 pieds, parce qu'elle n'en contient que les trois cinquièmes, (ou, ce qui est la même chose, parce qu'elle n'en est que les trois cinquièmes); tous ces rapports sont géométriques.

318. On nomme *terme antécédent*, la quantité que l'on compare; & *terme conséquent*, celle à laquelle on la compare.

Par exemple, si l'on compare une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, cette ligne de 12 pieds est l'antécédent du rapport qui est entre ces deux lignes: & celle de 8 pieds en est le conséquent.

319. On nomme *Exposant*, ou *Dénominateur*, d'un rapport, le quotient de l'antécédent de ce rapport, divisé par le conséquent.

Par exemple, le quotient 4 de 12 divisé par 3, est l'exposant du rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 3 pieds; parce

qu'il fait connoître que ce rapport est d'être quadruple de cette ligne de 3 pieds.

Pareillement, le quotient $\frac{2}{3}$ de 8 divisé par 12, est l'exposant du rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds; parce qu'il fait connoître que ce rapport est d'être les deux tiers de cette ligne de 12 pieds.

320. **O**N nomme rapport d'égalité, celui dont l'antécédent est égal au conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une autre ligne aussi de 12 pieds, est un rapport d'égalité.

On nomme au contraire, rapport d'inégalité, celui dont l'antécédent n'est point égal au conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, est un rapport d'inégalité.

Pareillement, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, est aussi un rapport d'inégalité.

321. On dit qu'une quantité est multiple d'une autre, lorsqu'on la considère comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire; mais, plus grand que l'unité.

Par exemple, 12 sont multiples de 4;

parce qu'ils sont le produit de 4 multipliés par 3.

Pareillement 17 sont multiples de 5 ; parce qu'ils sont le produit de 5 multipliés par $3\frac{2}{5}$.

On dit , au contraire , qu'une quantité est *sous-multiple* d'une autre , lorsqu'on la considère comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre fractionnaire quelconque ; mais , plus petit que l'unité.

Par exemple 8 sont sous-multiples de 12 ; parce qu'ils sont le produit de 12 multipliés par $\frac{2}{3}$, qui ne valent pas une unité.

Enfin , on dit que des quantités sont *équimultiples* , ou *multiples pareilles* d'autres quantités ; lorsqu'on les considère comme étant les produits de ces autres quantités multipliées chacune par un même nombre quelconque , entier ou fractionnaire , plus grand ou plus petit que l'unité.

Par exemple , 20 & 30 sont équimultiples de 4 & de 6 ; parce qu'ils sont les produits de ces deux nombres , multipliés chacun par le même nombre 5.

Pareillement , 18 & 34 sont équimultiples de 27 & 51 ; parce qu'ils sont les produits de ces deux nombres , multipliés chacun par le même multiplicateur $\frac{2}{3}$.

322. On nomme rapport *multiple* , ou

d'inégalité majeure, celui dont l'antécédent est plus grand que le conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, est un rapport multiple.

323. On nomme rapport sous-multiple, ou d'inégalité mineure, celui dont l'antécédent est plus petit que le conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, est un rapport sous-multiple.

324. **O**N dit que l'on compose † un rapport ; lorsque l'on ajoute le conséquent à l'antécédent, pour comparer la somme à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par composition, celui de 24 à 6.

325. On dit que l'on divise ¶ un rapport ; lorsque l'on retranche le conséquent de l'antécédent, pour comparer le reste à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par division, celui de 12 à 6.

326. On dit que l'on convertit § un rapport ; lorsque l'on ajoute le conséquent à

† Componendo. ¶ Dividendo. § Convertendo.

l'antécédent

l'antécédent , pour comparer la somme à ce même antécédent.

Par exemple , du rapport de 18 à 6 , on forme par conversion , celui de 24 à 18.

327. On dit que l'on *renverse* † un rapport ; lorsque l'on prend le conséquent de ce rapport , pour en faire l'antécédent d'un autre ; & l'antécédent , pour en faire le conséquent.

Par exemple , du rapport de 18 à 6 , on forme par inversion , celui de 6 à 18 ; & ces deux rapports de 18 à 6 , & de 6 à 18 , se nomment respectivement , rapports inverses.

328. Enfin , on dit que l'on *échange* ¶ deux rapports ; lorsque l'on prend l'antécédent du second , pour en faire le conséquent du premier ; & le conséquent du premier , pour en faire l'antécédent du second.

Par exemple , des rapports de 18 à 6 , & de 24 à 8 , on forme par échange , ceux de 18 à 24 , & de 6 à 8 ; & ces deux derniers rapports sont nommés alternes , à l'égard des deux premiers.

† Invertendo.

¶ Permutando , ou Alternando.

329. **O**N dit qu'un rapport est *plus grand* qu'un autre, lorsque son exposant (n) est plus grand que celui de cet autre rapport.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 15 pieds à une de 5 pieds, est plus grand que celui d'une ligne de 18 pieds à une de 9 pieds; parce que le quotient 3 de 15 divisés par 5, est plus grand que le quotient 2 de 18 divisés par 9.

Pareillement, le rapport d'une ligne de 16 pieds à une de 20 pieds, est plus grand que celui d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds; parce que le quotient $\frac{4}{5}$ de 16 divisés par 20, est plus grand \dagger que le quotient $\frac{2}{3}$ de 8 divisés par 12.

330. **O**N dit que des rapports sont *égaux*, ou sont les *mêmes*; lorsque leurs Exposans sont égaux.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 24 pieds à une de 8 pieds, est égal à celui d'une ligne de 18 pieds à une de 6 pieds; parce que le quotient 3 de 24 divisés par 8, est le même que celui de 18 divisés par 6.

Pareillement, le rapport d'une ligne de

\dagger Pour connoître le quel de ces quotiens est le plus grand, lorsqu'ils sont des nombres fractionnaires de différente dénomination; on les réduit à un même dénominateur.

10 pieds à une de 15 pieds ; est le même que celui d'une ligne de 14 pieds à une de 21 pieds , parce que le quotient $\frac{2}{3}$ de 10 divisés par 15 , est égal à celui de 14 divisés par 21.

S C H O L I E.

331. Pour marquer que des rapports sont égaux , tels que le sont , par exemple , les rapports de 24 à 8 , de 18 à 6 , de 21 à 7 , &c. on les sépare les uns des autres par quatre points rangés en quarré , de cette maniere : $24 . 8 :: 18 . 6 :: 21 . 7 :: \&c.$

Et pour exprimer cette égalité , on se sert de différentes expressions , dont les plus ordinaires sont les suivantes.

Premièrement , 24 sont à 8 , ce que 18 sont à 6 , ce que 21 sont à 7 , &c.

Secondement , 24 contiennent 8 , de la même maniere dont 18 contiennent 6 , dont 21 contiennent 7 , &c.

Troisièmement , 24 sont multiples de 8 , de la même maniere dont 18 sont multiples de 6 , dont 21 sont multiples de 7 , &c.

Quatrièmement. Enfin , 24 , 18 & 21 , sont équi-multiples de 8 , 6 & 7.

332. **O**N nomme *Proportion*, l'égalité de plusieurs rapports.

Par exemple, l'égalité qui est entre le rapport de 24 à 8, & celui de 18 à 6, se nomme proportion.

COROLLAIRE.

333. *Il suit de cette définition, qu'une proportion ne peut point avoir moins de trois termes.*

Démonst. Puisque la proportion consiste dans l'égalité des rapports, il faut au moins deux rapports pour former une proportion. Or, on ne peut point former deux rapports égaux, avec moins de trois quantités; puisqu'après avoir formé un rapport en comparant une quantité à une autre, il faut nécessairement comparer l'une de ces deux quantités à une troisième, pour former un second rapport qui soit égal au premier. Donc, il faut au moins trois quantités, pour former une proportion.

Par conséquent, C. Q. F. D.

334. On nomme *proportion continue*, ou *Progression*, une proportion dont chaque conséquent sert d'antécédent au terme qui le suit immédiatement.

Par exemple, cette proportion, 3 . 9 ::

9 . 27 :: 27 . 81 :: 81 . &c. s'appelle une proportion continue , ou une progression.

S C H O L I E.

335. Pour marquer que des quantités sont en proportion continue , telles que le sont , par exemple , celles-ci , 3 . 9 . 27 . 81 . 243 , &c. on les fait précéder par une petite ligne entre quatre points , de cette maniere , $\div\div$ 3 . 9 . 27 . 81 . 243 , &c.

Cette proportion est nommée continue ; parce que les rapports qui la forment sont liés les uns aux autres , par un terme commun. Les autres proportions sont appellées discretes ; parce que les rapports qui les forment sont séparés les uns des autres.

336. Les quantités qui forment des rapports égaux , se nomment quantités proportionnelles.

Par exemple , 24 , 8 , 18 & 6 , sont des quantités proportionnelles , parce que $24 . 8 :: 18 . 6$.

337. Le premier & le dernier terme d'une proportion , se nomment les termes extrêmes ; & les autres s'appellent les termes moyens.

Par exemple , 24 & 6 sont les extrêmes de cette proportion , $24 . 8 :: 18 . 6$; & 8 & 18 en sont les moyens.

338. On dit que deux rapports sont

réci-proques, lorsqu'ils sont tels qu'en renversant l'ordre des termes de l'un ou de l'autre, ils deviennent égaux.

Par exemple, le rapport de 8 à 24 est réciproque à celui de 18 à 6; parce que si l'on renverse l'ordre des termes du premier, on a cette proportion, 24 . 8 :: 18 . 6 : & si l'on renverse au contraire l'ordre des termes du second, on a cette autre proportion, 8 . 24 :: 6 . 18 .

339. Les quantités qui forment des rapports réciproques, se nomment quantités *réci-proquement* proportionnelles.

Par exemple, 8, 24, 18 & 6, sont des quantités réciproquement proportionnelles, parce que 24 . 8 :: 18 . 6.

340. Lorsque plusieurs quantités d'une part, & autant d'une autre, sont telles, que celles de la première part étant comparées chacune à celle qui la suit immédiatement, forment des rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la seconde part, comparées aussi chacune à celle qui la suit immédiatement; l'égalité de ces rapports se nomme *proportion d'égalité*.

Par exemple, $\left\{ \begin{array}{cccc} 12. & 4. & 28. & 14. & \&c. \\ 18. & 6. & 42. & 21. & \&c. \end{array} \right.$ forment ce que l'on appelle une proportion

d'égalité; *parce que* $12.4 :: 18.6$; $4.28 :: 6.42$; $28.14 :: 42.21$, &c.

341. Lorsque les rapports qui forment une proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier du premier rang est égal au premier du second rang, le second du premier rang au second du second rang, le troisieme au troisieme, & ainsi de suite; cette proportion se nomme *proportion d'égalité ordonnée*, ou *bien rangée*.

L'exemple précédent (n) est une propor- N. 340.
tion d'égalité ordonnée.

342. Lorsque les rapports qui forment une proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier du premier rang est égal au dernier du second rang, le second du premier rang au pénultieme du second rang, le troisieme, à l'antépénultieme; & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on vienne à comparer le dernier rapport du premier rang au premier du second rang; cette proportion se nomme *proportion d'égalité troublée*, ou *mal rangée*.

Par exemple, $\left\{ \begin{array}{cccc} 20. & 12. & 4. & 28. \\ 15. & 105. & 35. & 21. \end{array} \right.$
forment une proportion d'égalité troublée;
parce que $20.12 :: 35.21$; $12.4 :: 105.35$; & $4.28 :: 15.105$.

343. **O**N dit qu'un rapport est *composé* d'autres rapports, lorsqu'on le considère comme étant formé de ces autres rapports multipliés les uns par les autres : *c'est-à-dire*, comme étant le rapport du produit des antécédens de ces autres rapports, au produit de leurs conséquens.

Par exemple, si l'on considère que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 5 pieds, est d'être sextuple de cette ligne de 5 pieds, ce rapport est simple. Mais, si l'on considère que cette ligne de 30 pieds n'est sextuple de celle de 5 pieds, que parce qu'elle est le double du triple de cette ligne de 5 pieds ; alors, ce même rapport est composé d'un rapport double, & d'un rapport triple.

Pareillement, si l'on considère que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 72 pieds, est d'être les $\frac{5}{12}$ de cette ligne de 72 pieds, ce rapport est simple. Mais, si l'on considère que cette ligne de 30 pieds n'est les $\frac{5}{12}$ de celle de 72 pieds, que parce qu'elle est les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ de cette ligne de 72 pieds ; alors ce même rapport est composé des rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6.

COROLLAIRE.

344. *Il suit de cette définition , que si l'on a plusieurs quantités entre lesquelles il puisse † y avoir rapport ; celui de la première à la dernière , est composé des rapports de la première à la seconde , de la seconde à la troisième , de la troisième à la quatrième ; & ainsi de suite.*

Si l'on a les quantités suivantes ; par exemple , une ligne de 3 pieds , une de 8 pieds , une de 4 pieds , & une de 12 pieds ; le rapport de cette ligne de 3 pieds à celle de 12 pieds , est composé du rapport de cette même ligne de 3 pieds à celle de 8 pieds , du rapport de cette ligne de 8 pieds à celle de 4 pieds , & du rapport de cette ligne de 4 pieds à celle de 12 pieds.

Démonst. La ligne de 3 pieds est les $\frac{3}{8}$ de celle de 8 pieds ; celle de 8 pieds est le double de celle de 4 pieds ; & celle de 4 pieds est le tiers de celle de 12 pieds. Donc , cette ligne de 3 pieds est les $\frac{3}{8}$ du double du tiers de celle de 12 pieds. Par conséquent (n) , N. 343 , son rapport à cette ligne de 12 pieds est composé des rapports de 3 à 8 , de 2 à 1 , & de 1 à 3. Mais [H] , ces rapports sont ceux de

† Il faut que des quantités soient de même genre , afin qu'il puisse y avoir des rapports entr'elles. Il n'y a , par exemple , aucun rapport d'une aune à un louis d'or , d'une ligne à une surface , &c.

la première ligne à la seconde, de la seconde à la troisième, & de la troisième à la quatrième.

Donc, C. Q. F. D.

345. On nomme rapports *composans*, ceux dont la multiplication a produit un rapport composé.

Par exemple, les rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6, sont les rapports composans du rapport d'une ligne de 30 pieds
N. 343. à une de 72 pieds (n).

346. On dit qu'un rapport est *doublé* † d'un autre, lorsqu'on le considère comme étant composé de cet autre répété deux fois.

Par exemple, si l'on considère que le rapport d'une ligne de 36 pieds à une de 4 pieds, est d'être le triple du triple de cette ligne de 4 pieds, ce rapport est doublé d'un rapport triple.

Pareillement, si l'on considère que le rapport d'une ligne de 9 pieds à une de 16 pieds, est d'être les trois quarts des trois quarts de cette ligne de 16 pieds, ce rapport est doublé de celui de 3 à 4.

347. Enfin, on dit qu'un rapport est *triplé* d'un autre, lorsqu'on le considère

† Le vrai terme devrait être *redoublé*, de même que *retriplé*, dans la définition suivante, &c.

comme étant composé de cet autre répété trois fois : qu'il est quadruplé d'un autre, lorsque, &c. & ainsi de suite.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 56 pieds à une de 7 pieds, est d'être le double du double du double de cette ligne de 7 pieds ; ce rapport est triplé d'un rapport double.

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 64 pieds à une de 125 pieds, est d'être les quatre cinquiemes des quatre cinquiemes des quatre cinquiemes de cette ligne de 125 pieds, ce rapport est triplé de celui de 4 à 5.

COROLLAIRE I.

348. Il suit du corollaire précédent (n), N. 344 & des deux dernieres définitions, que dans une progression, le rapport du premier terme au troisieme, est doublé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au quatrieme, est triplé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au cinquieme, est quadruplé de celui du premier au second ; & ainsi de suite.

Dans cette progression $\div a, b, c, d, e, f, g, \&c.$ le rapport de a à c est doublé de celui de a à b : le rapport de a à d est triplé de celui de a à b : le rapport de a à e

est quadruplé de celui de a à b ; & ainsi de suite.

N. 332. Démonst. Si a est , par exemple , le triple de b , b est le triple de c (n) ; c est le triple de d ; & ainsi de suite.

Donc , premièrement , le rapport de a à c , est d'être le triple du triple de c . Par conséquent , il est doublé de celui de a à b N. 346. (n).

Secondement. Le rapport de a à d est d'être le triple du triple du triple de d . Par conséquent , il est triplé de celui de a à b N. 347. (n). Et ainsi de suite.

Pareillement , si a est , par exemple , les $\frac{2}{3}$ de b , b est les $\frac{2}{3}$ de c , c est les $\frac{2}{3}$ de d ; & ainsi de suite.

Donc , premièrement. Le rapport de a à c est d'être les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ de c . Par conséquent , N. 346. il est doublé de celui de a à b (n).

Secondement. Le rapport de a à d est d'être les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ de d . Par conséquent , N. 347. il est triplé de celui de a à b (n). Et ainsi de suite.

Or , la même démonstration subsiste , quel que soit l'exposant du rapport du premier terme a au second terme b .

Donc , C. Q. F. D.

Autre Démonst. Premièrement. Le rapport de a à c est composé de celui de a à b , N. 344. & de celui de b à c (n). Or , le rapport de

b à c est le même que celui de a à b (n). N. 332.
 Donc, le rapport de a à c est composé de celui de a à b répété deux fois. Par conséquent, il est doublé de ce dernier rapport (n). N. 346.

Secondement, Le rapport de a à d est composé de celui de a à b , de celui de b à c , & de celui de c à d (n). Or, le rapport de b à c , & celui de c à d , sont chacun le même que celui de a à b (n). Donc, le rapport de a à d est composé de celui de a à b répété trois fois. Par conséquent, il est triplé de ce dernier rapport (n). N. 347.

Troisièmement, enfin, on démontre par un raisonnement pareil, que le rapport de a à e est quadruplé de celui de a à b : que le rapport a à f est quintuplé de celui de a à b . Et ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

349. Il suit de ce corollaire, que dans une progression, le second terme est le produit du premier multiplié par la première puissance \dagger de l'exposant du rap-

\dagger On appelle première puissance d'un nombre quelconque, ce nombre même: seconde puissance d'un nombre, le produit de ce nombre multiplié par lui-même: troisième puissance, le produit de la seconde multipliée par la première: quatrième puissance, le produit de la troisième multipliée par la première: &c ainsi de suite.

Par exemple, 5 est la première puissance du nombre 5.

port du second terme au premier : le troisieme terme , est le produit du premier multiplié par la seconde puissance du même exposant : le quatrieme terme est le produit du premier multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant ; & ainsi de suite.

Dans cette progression \div a. b. c. d. e. f. g. &c. b est le produit de a multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport de b à a : c est le produit de a multiplié par la seconde puissance du même exposant : d est le produit de a multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant. Et ainsi de suite.

Démonst. Si l'exposant du rapport de b à a est, par exemple 3, b est le triple de a ; & par conséquent, le produit de a multiplié par 3 : c est le triple du triple de a ; & par conséquent, le produit de a multiplié par 9 : d est le triple du triple du triple de a ; & par conséquent, le produit de a multiplié par 27 ; & ainsi de suite. Or, 3 est la premiere puissance de l'exposant 3 ; 9 est sa seconde puissance ; 27 est sa troisieme puissance ; & ainsi de suite.

Pareillement, si l'exposant du rapport de b à a est, par exemple $\frac{2}{3}$, b est les $\frac{2}{3}$ de

25, la seconde puissance : 125, la troisieme : 625, la quatrieme ; & ainsi de suite.

a ; & par conséquent , le produit de *a* multiplié par $\frac{2}{3}$: *c* est les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ de *a* ; & par conséquent , le produit de *a* multiplié par $\frac{4}{9}$: *d* est les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ de *a* ; & par conséquent , le produit de *a* multiplié par $\frac{8}{27}$; & ainsi de suite. Or , $\frac{2}{3}$ est la première puissance de l'exposant $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ est sa seconde puissance ; $\frac{8}{27}$ est sa troisième puissance ; & ainsi de suite.

Mais , la même démonstration subsiste , quel que soit l'exposant du rapport du second terme *b* au premier terme *a*.

Donc , C. Q. F. D.

AXIOMES.

350. Les rapports qui sont égaux chacun à un même rapport , sont égaux entre eux ¶.

351. Si de deux rapports égaux , l'un est plus grand qu'un troisième , l'autre l'est aussi : & au contraire §.

352. Si l'on divise plusieurs quantités par un même diviseur , les quotiens † sont

¶ Euclide , II.

§ Euclide , 13.

† Par ce mot *quotient* , on entend , ce qui exprime la manière dont une quantité en contient une autre. Ainsi , lorsque l'on dit , le quotient de *a* divisé par *c* , est le même que celui de *b* divisé aussi par *c* ; on doit entendre la même chose que si l'on disoit , la manière dont *a* contient *c* , est la même que celle dont *b* contient aussi *c*.

entr'eux comme les quantités que l'on a divisées.

Par exemple , si a est double de b , le quotient de a divisé par d , est double de celui de b divisé aussi par d . Si a est triple de b , le quotient de a divisé par d , est triple de celui de b divisé aussi par d . Et ainsi de suite .

Au contraire , si a est la moitié de b , le quotient de a divisé par d , est la moitié de celui de b divisé aussi par d . Si a est le tiers de b , le quotient de a divisé par d , est le tiers de celui de b divisé aussi par d . Et ainsi de suite .

353. Si l'on divise une même quantité par plusieurs diviseurs , les quotiens sont
N. 327. entr'eux en rapports inverses (n) de ceux des diviseurs.

Par exemple , si a est double de b , le quotient de g divisé par a , est la moitié de celui de g divisé par b . Si a est triple de b , le quotient de g divisé par a , est le tiers de celui de g divisé par b . Et ainsi de suite .

Au contraire , si a est la moitié de b , le quotient de g divisé par a , est double de celui de g divisé par b . Si a est le tiers de b , le quotient de g divisé par a , est triple de celui de g divisé par b . Et ainsi de suite .



DES PROPORTIONS

GÉOMÉTRIQUES.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

354. *Si deux quantités sont égales, elles ont chacune le même rapport à une troisième quantité : & une troisième quantité a le même rapport à chacune d'elles †.*

PREMIÈREMENT. Si a est égal à b , le rapport de a à c est le même que celui de b à c .

Démonst. Puisque a est égal à b [H], le quotient de a divisé par c , est le même que celui de b divisé aussi par c (n). Donc, N. 352. le rapport de a à c est aussi le même que celui de b à c (n). N. 330.

SECONDEMENT. Si a est égal à b , le rapport de c à a est aussi le même que celui de c à b .

Démonst. Puisque a est égal à b [H], le quotient de c divisé par a est le même

† Euclide, 7.

N. 353. que celui de c divisé par b (n). Donc , le rapport de c à a , est aussi le même que

N. 330. celui de c à b (n).

Par conséquent , C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

355. Si deux quantités sont inégales , la plus grande a un plus grand rapport que la plus petite à une troisième quantité ; & une troisième quantité a un plus grand rapport à la plus petite qu'à la plus grande †.

PREMIÈREMENT. Si a est plus grand que b , le rapport de a à c est plus grand que celui de b à c .

Démonst. Puisque a est plus grand que b [H], le quotient de a divisé par c , est plus grand que celui de b divisé aussi par

N. 352. c (n). Donc , le rapport de a à c est aussi

N. 329. plus grand que celui de b à c (n).

SECONDEMENT. Si a est plus grand que b , le rapport de c à b est plus grand que celui de c à a .

Démonst. Puisque a est plus grand que

† Euclide , 8.

b [H], le quotient de c divisé par b , est plus grand que celui de c divisé par a (n). N. 353.
Donc, le rapport de c à b est aussi plus grand que celui de c à a (n).

N. 329.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

356. Si deux quantités ont chacune le même rapport à une troisième quantité, elles sont égales : & si une troisième quantité a le même rapport à chacune d'elles, elles le sont aussi †.

PREMIÈREMENT. Si le rapport de a à c est le même que celui de b à c , a est égal à b .

Démonst. Puisque le rapport de a à c , est le même que celui de b à c [H], le quotient de a divisé par c , est le même que celui de b divisé aussi par c (n). Donc, N. 330.
 a est égal à b (n). N. 352.

SECONDEMENT. Si le rapport de c à a est le même que celui de c à b , a est encore égal à b .

† Euclide, 9.

Démonst. Puisque le rapport de c à a est le même que celui de c à b [H], le quotient de c divisé par a , est le même
 N. 330. que celui de c divisé par b (n). Donc, a
 N. 353. est égal à b (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

357. Si de deux quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une troisième quantité; celle qui a le plus grand rapport, est la plus grande. Et si une troisième quantité a un plus grand rapport à l'une de ces deux quantités qu'à l'autre; celle à laquelle elle a le plus grand rapport, est la plus petite †.

PREMIÈREMENT. Si le rapport de a à c est plus grand que celui de b à c , a est plus grand que b .

Démonst. Puisque le rapport de a à c est plus grand que celui de b à c [H], le quotient de a divisé par c , est plus grand
 N. 329. que celui de b divisé aussi par c (n). Donc,
 N. 352. a est plus grand que b (n).

† Euclide, 10.

SECONDEMENT. Si le rapport de c à b est plus grand que celui de c à a , alors b est plus petit que a .

Démonst. Puisque le rapport de c à b est plus grand que celui de c à a [H], le quotient de c divisé par b , est plus grand que celui de c divisé par a (n). Donc, b N. 329.
est plus petit que a (n). N. 353.

Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

358. Ces quatre premières propositions ne sont que des axiomes, que l'on auroit pu énoncer de la manière suivante.

Si a & b sont égaux, ils sont également grands à l'égard de c ; & c est aussi grand à l'égard de a , qu'à l'égard de b .

Si a est plus grand que b , il est plus grand à l'égard de c , que b ne l'est à l'égard aussi de c : & c est plus grand à l'égard de b , qu'à l'égard de a .

Si a & b sont également grands à l'égard de c , ils sont égaux: & si c est aussi grand à l'égard de a , qu'à l'égard de b ; a & b sont encore égaux.

Enfin, si a est plus grand à l'égard de c , que b ne l'est à l'égard aussi de c ; a est plus grand que b : & si c est plus grand à l'égard de b , qu'à l'égard de a , b est plus petit que a .

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

359. *Les quantités qui sont équivariantes d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernières †.*

SI l'on multiplie a & b chacun par un même nombre quelconque, le rapport des produits est le même que celui de a à b .

Le nombre par lequel on multiplie a & b , est ou entier, ou fractionnaire.

PREMIER CAS.

Lorsque le nombre par lequel on multiplie a & b , est un nombre entier.

Il faut démontrer, par exemple, que $7a : 7b :: a : b$.

Démonst. Le quotient de a divisé par b , est la septième partie de celui de $7a$ divisés aussi par b (n); puisque a est la septième partie de $7a$.

Mais, le quotient de $7a$ divisés par $7b$,

† Cette Proposition, qui est la quinzième d'Euclide, est quelquefois énoncée de la manière suivante:

On ne change point un rapport, en multipliant, ou en divisant, par un même nombre, chacun de ses termes.

est aussi la septieme partie de celui de $7a$ divisés par b (n) ; puisque $7b$ sont septu- N. 353.
ples de b . Donc , les quotiens de a divisé
par b , & de $7a$ divisés par $7b$, sont égaux
(n). Par conséquent , $7a. 7b :: a. b$ (n). N. 68.
N. 330.

SECOND CAS.

*Lorsque le nombre par lequel on multiplie
a & b , est un nombre fractionnaire.*

Il faut démontrer , par exemple , que

$$\frac{3a}{5} \cdot \frac{3b}{5} :: a. b.$$

Démonst. Si l'on multiplie $\frac{3a}{5}$ & $\frac{3b}{5}$
chacun par leur dénominateur 5 , on a ,
 $3a. 3b :: \frac{3a}{5} \cdot \frac{3b}{5}$ [D] ; puisque $3a$ & $3b$
sont équimultiples de $\frac{3a}{5}$ & $\frac{3b}{5}$. Mais $3a.$
 $3b :: a. b$ [D] ; puisque $3a$ & $3b$ sont
équimultiples de a & b . Donc , $\frac{3a}{5} \cdot \frac{3b}{5} ::$
 $a. b$ (n). N. 350.

Or , dans l'un comme dans l'autre cas ,
la démonstration reste pareille , quel que
soit le nombre par lequel on multiplie a
& b .

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

360. Il suit de ce théorème, que le produit de deux quantités quelconques, est moyen proportionnel entre les quarrés de ces deux mêmes quantités.

Le produit de a multiplié par b , est moyen proportionnel entre le quarré de a & celui de b .

Démonst. Si l'on multiplie a & b , chacun par a , on a $aa . ab :: a . b . (n) :$ & si l'on multiplie les mêmes a & b chacun aussi par b , on a $ab . bb :: a . b (n)$.
 N. 359. Donc, les rapports de aa à ab , & de ab à bb , sont égaux chacun au même rapport de a à b . Par conséquent, $aa . ab :: ab . bb (n)$.
 N. 350.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

361. Il suit aussi de ce même théorème, que si quatre quantités sont proportionnelles; le quarré d'une antécédente est au produit de cette antécédente multipliée par sa conséquente, ce que le quarré de l'autre antécédente, est au produit de cette autre antécédente multipliée aussi par sa conséquente.

Si $a . b :: c . d$, le quarré aa de a est
 au

au produit ab de a multiplié par b , ce que le quarré cc de c est au produit cd de c multiplié par d .

Démonst. Si l'on multiplie a & b chacun par a , on a $aa . ab :: a . b (n) :$ & N. 359. si l'on multiplie aussi c & d chacun par c , on a $cc . cd :: c . d (n)$. Or, les rapports de N. 359. a à b , & de c à d , sont égaux [H]. Donc, ceux de aa à ab , & de cc à cd , le sont aussi (n). N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

362. Si quatre quantités sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal à celui des moyennes.

SI $a . b :: c . d$, le produit de a multiplié par d , est égal à celui de b multiplié par c .

Démonst. Si l'on multiplie a & b chacun par d , on a $ad . bd :: a . b (n) :$ & si N. 359. l'on multiplie aussi c & d chacun par b , on a $bc . bd :: c . d (n)$. Or, les rapports de N. 359. a à b , & de c à d , sont égaux [H]. Donc, ceux de ad à bd , & de bc à bd , le sont aussi (n); & par conséquent, ad est égal à N. 350. bc (n). N. 356.

Donc, C. Q. F. D.

P

COROLLAIRE.

363. Il suit de ce théorème, que si trois quantités sont en progression, le produit des extrêmes est égal au carré de la moyenne.

PROPOSITION VII.

PROBLÈME.

364. Trouver le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers termes sont donnés †.

IL faut trouver le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers termes sont 28, 32 & 49.

Solution. Multipliez l'un par l'autre, les moyens 32 & 49. Divisez par le premier terme 28, le produit 1568. Le quotient 56, sera le terme demandé.

Démonst. Puisque dans une proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens (n), 28 fois le terme demandé doit produire autant que 32 fois 49. Or, 32 fois 49 produisent 1568. Donc, 28

† On donne ordinairement à ce problème, les noms de *regle de Proportion*, *regle de Trois*, *regle d'Or*, &c.

fois le terme demandé produit aussi 1568.
Par conséquent, ce terme est le quotient
56 de 1568 divisés par 28.

Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

365. Il suit de la solution de ce problème, que *pour trouver le troisieme terme d'une progression dont les deux premiers termes sont donnés; il faut multiplier le second terme par lui-même, & diviser ensuite le produit, par le premier terme.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

366. *Si quatre quantités sont telles, que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyennes; elles sont proportionnelles.*

SI les quantités a , b , c & d sont telles que le produit de a multiplié par d , soit égal à celui de b multiplié par c ; le rapport de a à b est le même que celui de c à d .

Démonst. Si l'on compare chaque produit ad & bc , à celui des conséquentes b

& d ; on a, $ad . bd :: a . b :$ & $bc . bd ::$
 N. 359. $c . d$ (n). Or , les rapports de ad à bd , &
 N. 354. de bc à bd , sont égaux (n) ; puisque les
 produits ad & bc le sont [H]. Donc ,
 les rapports de a à b , & de c à d , sont aussi
 N. 350. égaux (n).

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

367. Il suit de ce théorème , que si
*trois quantités sont telles , que le produit
 des extrêmes soit égal au quarré de la
 moyenne , elles sont en progression.*

COROLLAIRE II.

368. Il suit de ce corollaire , que pour
*trouver un moyen proportionnel entre deux
 nombres donnés , il faut multiplier ces deux
 nombres l'un par l'autre , & la racine quar-
 rée du produit sera le moyen demandé.*



PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

369. Si le premier terme d'une proportion est plus petit, aussi grand, ou plus grand que le troisième; le second est aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand que le quatrième †.

DANS cette proportion, $a . b :: c . d$, le premier terme a est, ou plus petit que c ou égal à c ; ou plus grand que c .

PREMIÈREMENT. Si a est plus petit que c , b est aussi plus petit que d .

Démonst. Le quotient de c divisé par d , est égal à celui de a divisé par b [H]. Mais, le quotient de a divisé par b , est plus petit que celui de c divisé aussi par b (n); puisque a est plus petit que c [H]. N. 352. Donc, le quotient de c divisé par d , est aussi plus petit que celui de c divisé par b (n). Par conséquent, b est plus petit que d (n). N. 351. N. 353.

SECONDEMENT. Si a est égal à c , b est aussi égal à d .

† Euclide, 14.

Démonst. Le quotient de c divisé par d , est égal à celui de a divisé par b [H].

- Mais, le quotient de a divisé par b , est
 N. 352. égal à celui de c divisé aussi par b (n); puisque a est égal à c [H]. Donc, le quotient de c divisé par d , est égal à celui de
 N. 350. c divisé par b (n). Par conséquent, b est
 N. 353. égal à d (n).

TROISIÈMEMENT. Enfin, si a est plus grand que c , b est aussi plus grand que d .

- Démonst.* Le quotient de c divisé par d , est égal à celui de a divisé par b [H]. Mais le quotient de a divisé par b , est plus grand
 N. 352. que celui de c divisé aussi par b (n); puisque a est plus grand que c [H]. Donc, le quotient de c divisé par d , est aussi plus
 N. 351. grand que celui de c divisé par b (n). Par
 N. 353. conséquent, b est plus grand que d (n).

Donc, C. Q. F. D.

U S A G E.

370. On se sert de cette proposition, pour examiner si les termes d'une proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être; & par conséquent, pour connoître si une règle de Trois est directe ou inverse.

Si l'on propose, par exemple, cette question.

Pour tapisser un certain appartement, il

faut 217 aunes d'une étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de largeur, combien d'aunes faudra-t-il d'une autre étoffe qui a $\frac{3}{4}$ de largeur ?

SOLUTION. Le nombre des aunes demandé, est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont donnés. Ainsi, l'on commence par les poser de la manière suivante.

Si $\frac{2}{3}$ aunes de largeur exigent 217 aunes de longueur, combien en exigent $\frac{3}{4}$ aunes de largeur ?

On examine ensuite si, relativement aux conditions de la question, les termes sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être. Or, on voit qu'ils ne le sont pas. Car, il faudra moins d'une étoffe qui a $\frac{3}{4}$ de largeur, qu'il n'en faut de celle qui n'en a que $\frac{2}{3}$: & suivant l'ordre dans lequel ces termes sont posés, on trouveroit le contraire ; puisque $\frac{2}{3}$ étant plus petits que $\frac{3}{4}$, le second terme 217. seroit aussi plus petit que le terme demandé (n).

N. 369.

Les termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ sont donc ici posés dans un ordre inverse. Il faut donc transporter $\frac{3}{4}$ du troisième rang au premier ; & $\frac{2}{3}$, du premier rang au troisième : & comme par cette inversion la proportion deviendra directe, on trouvera (n) $192 \frac{8}{9}$ pour son quatrième terme, N. 364. qui est le nombre des aunes demandé.

On feroit les mêmes opérations, & l'on trouveroit la même réponse, en raisonnant de la maniere suivante.

217 aunes de longueur sur $\frac{2}{3}$ de largeur produisent une surface de $144\frac{2}{3}$ aunes quarrées (n). Ainsi, il s'agit de trouver le nombre qui étant multiplié par $\frac{3}{4}$, produira la même surface. Or, pour le connoître, on divise $144\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$; & le quotient $192\frac{8}{9}$ est ce nombre.

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

371. Si quatre quantités de même genre ¶ sont proportionnelles, elles le sont aussi étant échangées †.

Si le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; le rapport de a à c est aussi égal à celui de b à d .

Démonst. Puisque $a . b :: c . d$ [H], a contient b de la même maniere dont c contient d (n). Donc, a & c sont équimulti-

† Euclide, 16.

¶ On ne peut faire d'échange, que lorsque tous les termes d'une proportion sont de même genre. Puisque, si a étant, par exemple, une ligne, c étoit une surface, il n'y auroit aucun rapport de a à c .

ples de b & d . Par conséquent, $a . c :: b . d$ (n).

N. 359.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

372. Il suit de ce théorème, que si quatre quantités sont proportionnelles, elles le sont aussi étant renversées.

Si le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; le rapport de b à a est aussi égal à celui de d à c .

Démonst. $a . b :: c . d$ [H]. Ainsi, en échangeant (n), $a . c :: b . d$; & par conséquent, $b . d :: a . c$. Donc, en échangeant encore, $b . a :: d . c$. N. 371.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

373. Il suit aussi de ce même théorème, que si quatre quantités sont proportionnelles; le carré d'une antécédente est à celui de sa conséquente, comme le produit des antécédentes est à celui des conséquentes.

Si $a . b :: c . d$, le carré de a est à celui de b , comme le produit de a multiplié par c , est à celui de b multiplié par d .

Démonst. $a . b :: c . d$. [H]. Donc, en échangeant, $a . c :: b . d$ (n). Mais, N. 371.
P v

N. 361. $aa . ac :: bb . bd (n)$. Donc , en échangeant encore , $aa . bb :: ac . bd$.

Par conséquent , C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

374. *Si quatre quantités sont proportionnelles , elles le sont aussi étant divisées †.*

SI le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; le rapport de $a-b$ à b , est aussi égal à celui de $c-d$ à d .

Démonst. Le quotient de $a-b$ divisé par b , est plus petit d'une unité que celui de a divisé par b : & le quotient de $c-d$ divisé par d , est aussi plus petit d'une unité que celui de c divisé par d . Mais , les quotiens de a divisé par b , & de c divisé par d , sont égaux [H]. Donc , ceux de $a-b$ divisé par b , & de $c-d$ divisé par d ,
 N. 64. le sont aussi (n). Par conséquent , $a-b$.
 N. 330. $b :: c-d . d (n)$.

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

375. Il suit de ce théorème , que l'on

† Euclide , 17.

ne change point un rapport , en retranchant de chacun de ses termes ; pourvu que ce que l'on retranche du premier terme soit à ce que l'on retranche du second , comme ce premier terme est au second †.

Si le rapport de a à b est égal celui de c à d , la différence des antécédentes a & c , est à celle des conséquentes b & d , ce que a est à b .

Démonst. $a . b :: c . d$. [H]. Donc , en échangeant $a . c :: b . d$ (n). Mais , en di- N. 371.
visant , $a - c . c :: b - d . d$ (n). Donc , en N. 374.
échangeant encore , $a - c . b - d :: c . d$; &
par conséquent , ce que a est à b .

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

376. Il suit de ce corollaire , que si deux quantités qui sont divisées chacune en deux parties , sont telles , que ces deux quantités , & leurs premières parties soient proportionnelles ; ces deux mêmes quantités , & leurs secondes parties le sont aussi †.

Si le rapport de $a + b$ à $c + d$ est égal à celui de a à c ; il l'est aussi à celui de b à d .

Démonst. Puisque $a + b . c + d :: a . c$ [H] ;

† Euclide , 5.

si l'on retranche a de $a + b$, & c de $c + d$,
 les restes b & d sont entr'eux ce que $a + b$
 N. 375. est à $c + d$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

377. *Si quatre quantités sont proportionnelles ; elles le sont aussi étant composées †.*

Si le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; le rapport de $a + b$ à b , est aussi égal à celui de $c + d$ à d .

Démonst. Le quotient de $a + b$ divisé par b , est plus grand d'une unité que celui de a divisé par b : & le quotient de $c + d$ divisé par d , est aussi plus grand d'une unité que celui de c divisé par d . Mais, les quotiens de a divisé par b , & de c divisé par d , sont égaux [H]. Donc, ceux de $a + b$ divisé par b , & de $c + d$ divisé
 N. 64. par d , le sont aussi (n). Par conséquent,
 N. 330. $a + b : b :: c + d : d$ (n).

Donc, C. Q. F. D.

† Euclide, 18.

COROLLAIRE I.

378. Il suit de ce théorème, que *si quatre quantités sont proportionnelles ; elles le sont aussi étant converties.*

Si le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; la rapport de $a + b$ à a , est aussi égal à celui de $c + d$ à c .

Démonst. $a . b :: c . d$ [H]. Donc, en renversant, $b . a :: d . c$ (n). Par consé- N. 372.
quent, en composant, $a + b . a :: c + d .$
 c (n). N. 377.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

379. Il suit aussi de ce même théorème, que *l'on ne change point un rapport, en ajoutant à chacun de ses termes ; pourvu que ce que l'on ajoute au premier terme soit à ce que l'on ajoute au second, comme ce premier terme est au second †.*

Si le rapport de a à b est égal à celui de c à d ; la somme des antécédentes a & c , est à celle des conséquentes b & d , ce que a est à b .

Démonst. $a . b :: c . d$ [H]. Donc, en échangeant, $a . c :: b . d$ (n). Mais, en N. 371.
composant, $a + c . c :: b + d . d$ (n). Donc, N. 377.

† Euclide, 1 & 12.

en échangeant encore, $a+c . b+d :: c . d$;
& par conséquent, ce que a est à b .

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

380. Il suit de ce second corollaire, que dans une progression ; un conséquent quelconque moins son antécédent, est à cet antécédent, ce que le dernier terme moins le premier, est à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier.

De cette progression, $:: a . b . c . d . e . f . g$; on conclut cette proportion, $b-a . a :: g-a . a+b+c+d+e+f$.

Démonst. Puisque [H], a, b, c, d, e, f & g , sont en progression ; $a . b :: b . c :: c . d :: d . e :: e . f :: f . g$ (n). Donc, a est à b , comme la somme des antécédens a, b, c, d, e & f , est à celle des conséquens b, c, d, e, f & g (n). Par conséquent, en renversant (n), $b . a :: b+c+d+e+f+g . a+b+c+d+e+f$.
N. 374. Mais, en divisant (n), $b-a . a :: b+c+d+e+f+g-a-b-c-d-e-f . a+b+c+d+e+f$. Donc, puisque le troisième terme $b+c$ &c. ne vaut que $g-a$, cette dernière proportion se réduit à celle-ci, $b-a . a :: g-a . a+b+c+d+e+f$.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

381. Enfin, il suit de ce dernier corollaire, que *dans une progression, si le second terme est double du premier; le dernier moins le premier, est égal à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier: si le second terme est triple du premier; le dernier moins le premier, est double de cette somme: si le second terme est quadruple du premier; le dernier moins le premier, est triple de cette même somme; & ainsi de suite.*

Dans cette progression, $\therefore a . b . c . \&c.$ (dont nous représentons le dernier terme par z ; & par s la somme de tous les termes qui précèdent z), si b est double de a , $z-a$ est égal à s : si b est triple de a , $z-a$ est double de s : si b est quadruple de a , $z-a$ est triple de s : & ainsi de suite.

Démonst. $b-a . a :: z-a . s, (n).$ N. 380.

Donc, *Premièrement.* Si b est double de a , $b-a$ est égal à a . Par conséquent, $z-a$ l'est aussi à s .

Secondement. Si b est triple de a , $b-a$ est double de a . Par conséquent, $z-a$ l'est aussi de s .

Troisièmement. Si b est quadruple de a ,

$b-a$ est triple de a . Par conséquent, $z-a$ l'est aussi de s . Et ainsi de suite.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

382. *Diviser une quantité donnée, proportionnellement aux parties aussi données d'une autre quantité †.*

IL faut diviser 225, en parties qui soient proportionnelles aux parties 36, 48 & 66, de 150.

N. 364. *Solution.* Cherchez (n) les quatriemes termes 54, 72 & 99 de ces trois proportions, 150. 225 :: 36. * :: 48. * :: 66. * ; ils seront les parties demandées.

Démonst. Suivant ce qui est proposé, il faut que 36 soit à la premiere partie demandée, ce que 48 est à la seconde, ce que 66 est à la troisieme. Ainsi, les trois parties données sont les antécédens d'une proportion, dont les trois parties demandées sont les conséquens.

Or, dans une proportion, la somme

† On donne ordinairement à ce problème, le nom de *regle de Compagnie*.

des antécédens est à celle des conséquens ,
ce qu'un antécédent quelconque est à
son conséquent (n).

N. 379.

Donc , la somme 150 des trois parties données, est à la somme 225 des trois parties demandées ; ce que la première partie donnée 36 , est à la première partie demandée ; ce que la seconde partie donnée 48 , est à la seconde partie demandée ; ce que , &c.

Par conséquent , pour trouver ces trois parties demandées, il faut faire (n) les trois N. 364.
regles de proportion , qui sont ordonnées par la solution.

Donc , C. Q. F. F.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

383. *Si l'on multiplie , ou si l'on divise ,
par ordre les termes de deux propor-
tions ; les produits , ou les quotiens ,
sont proportionnels †.*

Si l'on multiplie les termes de cette proportion, $a . b :: c . d$, par ceux de cette autre proportion $e . f :: g . h$, chacun par

† On énonce quelquefois ainsi ce théorème : *Les rapports qui sont composés de rapports égaux , sont aussi égaux.*

chacun , les produits ae , bf , cg & dh , sont proportionnels.

Démonst. $a . b :: c . d$ [H]. Ainsi , en
 N. 371. échangeant , $a . c :: b . d$ (n). Donc , si
 l'on multiplie les deux premiers termes
 chacun par e , & les deux derniers chacun
 N. 359. par f , on a $ae . ce :: bf . df$ (n). Par
 conséquent , en échangeant encore , ae .
 N. 371. $bf :: ce . df$ (n).

Pareillement , $e . f :: g . h$, [H]. Ainsi ,
 N. 371. en échangeant , $e . g :: f . h$ (n). Donc ,
 si l'on multiplie aussi les deux premiers ter-
 mes chacun par c , & les deux derniers ,
 chacun par d ; on a , $ce . cg :: df . dh$
 N. 359. (n). Par conséquent , en échangeant en-
 core , $ce . df :: cg . dh$.

Ainsi , les rapports de ae à bf , & de cg
 à dh , sont égaux chacun au même rap-
 port de ce à df . Donc , $ae . bf :: cg .$
 N. 350. dh (n).

Et si l'on divise les termes de cette pro-
 portion , $a . b :: c . d$, par ceux de cette
 autre proportion , $e . f :: g . h$, chacun par
 chacun ; les quotiens $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ & $\frac{d}{h}$ sont
 aussi proportionnels.

Démonst. Si l'on multiplie $\frac{a}{e}$ & $\frac{b}{f}$ cha-
 cun par le même produit ef , on a ,
 N. 359. $\frac{a}{e} . \frac{b}{f} :: af . be$ (n).

Et si l'on multiplie aussi $\frac{c}{g}$ & $\frac{d}{h}$ chacun par le même produit gh , on a, $\frac{c}{g} \cdot \frac{d}{h}$
 $:: ch. dg$ (n). N. 359.

Mais, les rapports de af à be , & de ch à dg , sont égaux [D]; puisqu'ils sont les produits des termes de ces deux proportions $a.b :: c.d$, & $f.e :: h.g$, multipliés par ordre. Donc, les rapports de $\frac{a}{e}$ à $\frac{b}{f}$, & de $\frac{c}{g}$ à $\frac{d}{h}$, sont aussi égaux (n). N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

384. Il suit de la première partie de ce théorème, que *les puissances pareilles des termes d'une proportion, sont proportionnelles* : & de la seconde partie, que *les racines pareilles des termes d'une proportion, sont aussi proportionnelles*.



PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

385. *Les quarrés sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs racines ; les cubes , en rapport triplé : les quatriemes puissances , en rapport quadruplé : & ainsi de suite.*

LE rapport du quarré de a au quarré de b , est doublé du rapport de a à b : celui du cube de a au cube de b , en est triplé : celui de la quatrieme puissance de a à la quatrieme puissance de b , en est quadruplé : & ainsi de suite.

Démonst. Si a étant , par exemple , les $\frac{5}{6}$ de b , on multiplioit a & b , chacun par $\frac{5}{6}$; le produit ab seroit aussi les $\frac{5}{6}$ du produit bb (n).

Mais , au lieu de multiplier a par b , on le multiplie par a , qui est les $\frac{5}{6}$ de b [H]. Donc , le produit aa est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit bb .

Or , puisque aa est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de bb , le rapport de aa à bb est celui de 5 à 6 , répété deux fois. Donc , il est doublé de ce dernier rapport (n) ; & par consé-

quent , de celui de a à b , qui est le même [H].

Pareillement , si l'on multiplioit aa & bb , chacun par b , le produit aab seroit encore les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit bbb (n). N. 359.

Mais , au lieu de multiplier aa par b , on le multiplie par a , qui est les $\frac{5}{6}$ de b , [H]. Donc , le produit aaa est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit bbb .

Or , puisque aaa est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de bbb , le rapport de aaa à bbb est celui de 5 à 6 répété trois fois. Donc , il est triplé de ce dernier rapport (n) ; & par conséquent , N. 347. de celui de a à b , qui est le même [H]. Et ainsi de suite.

Or , la démonstration reste pareille , quel que soit l'exposant du rapport de a à b .

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

386. Il suit de ce théorème , que dans une progression , le quarré du premier terme est au quarré du second , ce que le premier terme est au troisieme : le cube du premier terme est au cube du second , ce que le premier terme est au quatrieme : la quatrieme puissance du premier terme est à la quatrieme puissance du second , ce que le premier terme est au cinquieme : & ainsi de suite.

Dans cette progression $\therefore a . b . c . d . e . f .$ &c. le quarré de a est à celui de b , ce que a est à c : le cube de a est au cube de b , ce que a est à d : la quatrieme puissance de a est à la quatrieme puissance de b , ce que a est à e ; & ainsi de suite.

Démonst. Le rapport du quarré de a au quarré de b , & le rapport de a à c , sont doublés, l'un & l'autre, du même rapport de a à b (n). Donc, ils sont égaux.

Pareillement. Le rapport du cube de a au cube de b , & le rapport de a à d , sont triplés, l'un & l'autre, du même rapport de a à b (n). Donc, ils sont aussi égaux. Et ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

387. Il suit de ce corollaire : Premièrement, que pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres quelconques a & b , il faut chercher (n) le quatrieme terme de cette proportion, $a . b :: aa . *$; & extraire ensuite la racine quarrée de ce quatrieme terme.

Secondement, que pour trouver le premier de deux moyens proportionnels entre deux nombres quelconques a & b , il faut chercher (n) le quatrieme terme de cette pro-

portion, $a.b::aaa.$ *; & extraire ensuite la racine cube de ce quatrieme terme.

Troisièmement, que pour trouver le premier de trois moyens proportionnels entre deux nombres quelconques a & b , il faut chercher (n) le quatrieme terme de cette pro- N. 364.
portion $a.b::aaaa.$ *; & extraire ensuite la racine quatrieme de ce quatrieme terme.

Et ainsi de suite.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

388. Dans une proportion d'égalité ordonnée; le premier & le dernier terme du premier rang; & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels †.

SI les quantités a, b & c, d, e & f , forment une proportion d'égalité ordonnée; le rapport de a à c est le même que celui de d à f .

Démonst. $a.b::d.e$; & $b.c::e.f$
(n). Donc, en échangeant, $a.d::b.e$, N. 341.
& $b.e::c.f$ (n). N. 371.

† Euclide, 22.

360 LES ELÉMENTS D'EUCLIDE.

Ainsi, les rapports de a à d , & de c à f , sont égaux chacun au même rapport N. 350. de b à e . Donc, $a.d :: c.f$ (n); & par conséquent, en échangeant, $a.c :: d.f$.
Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

389. *Dans une proportion d'égalité troublée; le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels †.*

SI les quantités a, b & c, d, e & f , forment une proportion d'égalité troublée; le rapport de a à c est le même que celui de d à f .

N. 342. *Démonst.* $a.b :: e.f$; & $b.c :: d.e$ (n).

Donc, si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, on a,

N. 383. $ab.bc :: ed.ef$ (n). Ainsi, si l'on divise les deux premiers termes chacun par b , & les deux derniers chacun par e ; on a, $a.c$

N. 359. $:: d.f$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

† Euclide, 23.

PROPOSITION

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

390. Si six quantités sont telles , que les quatre premières soient proportionnelles ; & que la cinquieme , la seconde , la sixieme , & la quatrieme , le soient aussi : la somme de la premiere & de la cinquieme est à la seconde , ce que la somme de la troisieme & de la sixieme est à la quatrieme †.

SI les six quantités a, b, c, d, e & f , sont telles que , $a . b :: c . d$; & que $e . b :: f . d$; le rapport de $a + e$ à b , est le même que celui de $c + f$ à d .

Démonst. [H] $a . b :: c . d$; & $e . b :: f . d$. Donc , en échangeant , $a . c :: b . d$. & $e , f :: b . d$ (n). Par consé- N. 371.
quent , $a . c :: e . f$ (n). N. 350.

Mais , en échangeant encore , $a . e :: c . f$. Donc , en composant , $a + e . e :: c + f . f$ (n). Par conséquent , en échangeant pour la troisieme fois , $a + e . c + f :: e . f$. N. 377.

Or , $e . f :: b . d$ [D]. Donc , $a + e . c +$

† Euclide , 24.

N. 350. $f :: b . d (n)$. Par conséquent, en échangeant pour la quatrième fois, $a + e . b :: c + f . d$.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

391. *Si quatre quantités sont proportionnelles ; la somme de la plus grande & de la plus petite, est plus grande que celle des deux autres †.*

Si les quatre quantités $a, b, c, \& d$, dont a est la plus grande & d la plus petite, sont proportionnelles ; la somme $a + d$, de a & de d , est plus grande que la somme $b + c$ de b & de c .

Démonst. [H] $a . b :: c . d$. Donc,

N. 375. $a - c . c :: b - d . d (n)$. Par conséquent, puisque c est plus grand que d [H], $a - c$

N. 369. est aussi plus grand que $b - d (n)$. Or, puisque $a - c$ est plus grand que $b - d$, si l'on ajoute à chacun la même quantité $c + d$, la première somme $a - c + c + d$, sera aussi plus grande que la seconde $b - d + c + d$

N. 65. (n). Mais, $-c + c$ se détruisent, de même

† Euclide, 25.

que $-d + d$. Donc, la premiere somme $a + d$ est plus grande que la seconde $b + c$.

Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGES

Des Progressions géométriques.

QUESTION Iere.

392. On suppose qu'un pere de famille a eu deux enfans ; que chacun de ces deux enfans en a eu deux autres ; & ainsi de suite : & l'on demande de combien de personnes a dû être sa quinzieme génération.

SOLUTION. Le nombre des personnes demandé est le quinzieme terme d'une progression, dont le premier terme est 2, & dont l'exposant du rapport du second terme au premier, est aussi 2. Or (n), dans une progression, le quinzieme N. 349. terme est le produit du premier, multiplié par la quatorzieme puissance de l'exposant du rapport du second terme au premier. Donc, si on eleve l'exposant 2 à sa quatorzieme puissance, que l'on trouvera de 16384 ; & si l'on multiplie le premier terme (lequel est aussi 2), par cette quatorzieme puissance, le produit 32768 fera le nombre demandé.

Autre Question.

393. *Un tuteur doit à son pupille 12000 l. de capital, avec les intérêts des intérêts au denier 20, pendant 8 années. On demande combien il doit payer à la fin de cette huitième année,*

SOLUTION. Ce capital, avec les intérêts des intérêts, pendant 8 années, est le huitième terme d'une progression, dont le premier est 12000; & dont l'exposant du rapport du second au premier, est $\frac{21}{20}$. Ainsi (n), si l'on multiplie 12000 par la septième puissance de $\frac{21}{20}$, le produit 16885 liv. 4 s. 1 den. p. p. fera la dette demandée.

QUESTION II.

394. *Un particulier a 20 diamans. Il propose de les vendre, à condition qu'on lui paiera 6 den. du premier, 18 du second, 54 du troisième; & ainsi de suite. On demande le prix de ces 20 diamans.*

SOLUTION. Le prix demandé est la somme de tous les termes d'une progression qui en a 20, dont le premier est 6; & dont l'exposant du rapport du second au premier, est 3. Or (n), dans une progression de 20 termes, dont l'expo-

fant du rapport du second terme au premier est 3 ; la somme des 19 premiers termes est la moitié de la différence du premier terme au vingtieme. Ainsi, l'on commencera par chercher le vingtieme terme (n), que l'on trouvera de 6973568802. N. 349. De ce vingtieme terme, on retranchera le premier (lequel est 6), & il restera 6973568796. On prendra la moitié de ceste, afin d'avoir la somme 3486784398 des 19 premiers termes. Enfin, à cette somme on ajoutera le vingtieme terme ; & la somme 10460353200 deniers, ou ou 43584805 livres, fera le prix demandé.

QUESTION III.

395. *Un particulier a mis 70 louis d'or sur un vaisseau, pour commercer dans les Pays étrangers. Au bout d'un an, ce vaisseau a rapporté les 70 louis, avec un certain profit. On a remis le tout sur un autre vaisseau, qui au bout d'un an, a rapporté le même profit que le premier, à proportion. Ayant ainsi continué à faire la même chose chaque année, le vaisseau qui est revenu à la fin de la dixieme, a rapporté 35840 louis, tant pour capital que pour gain. On demande en quelle proportion ce capital a augmenté chaque année.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver l'exposant du rapport qui regne dans une progression de 10 termes, dont le premier N. 349. est 70, & le dernier 35840. Or (n), dans une progression, le dixieme terme est le produit du premier multiplié par la neuvieme puissance de l'exposant du rapport du second au premier. Donc, si l'on divise 35840 par 70, le quotient 512 fera cette neuvieme puissance. Par conséquent, si l'on extrait la racine neuvieme de ce quotient, le nombre 2 que l'on trouvera pour cette racine, fera cet exposant. Ainsi, la seconde mise a été double de la premiere; la troisieme, double de la seconde; & ainsi de suite.

QUESTION IV.

396. *Un particulier a de très-beaux chevaux. Il consent de les vendre tous à la même personne, si elle veut lui payer 4 deniers du premier, 12 du second, 36 du troisieme, & ainsi de suite; de maniere que le dernier reviendrait à 708588 deniers. On demande combien ce particulier a de chevaux à vendre.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 4, le dernier 708588, & l'exposant 3 du

rapport du second au premier. Or (n), N. 349. puisque 708588 est le dernier terme d'une progression, il est le produit du premier terme 4, multiplié par une certaine puissance de l'exposant 3, plus petite d'une unité que le nombre des termes que l'on cherche. Ainsi, si on le divise par 4, le quotient 177147 sera cette certaine puissance; & par conséquent, pour connoître ce nombre des termes, il faut chercher le degré de cette puissance. Or, pour le trouver, on élèvera l'exposant 3 de puissance en puissance, jusqu'à ce que l'on parvienne à former ce même nombre 177147. Et comme ce ne sera qu'en l'élevant à la onzième puissance que l'on y parviendra, on en conclura que la progression dont il s'agit a 12 termes; & que par conséquent, le nombre des chevaux demandé est 12.

QUESTION V.

397. *Un particulier a 10 tableaux. Le dernier lui revient à 137781 livres; le pénultième ne lui coûte que le tiers du dernier; l'antépénultième, le tiers du pénultième; & ainsi de suite. On demande combien il a acheté le premier.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le premier terme d'une progression, qui en

N. 349. a 10, & dont on connoît le dernier 137781, avec l'exposant 3 du rapport du second au premier. Or (n), ce dernier terme est le produit du premier, multiplié par la neuvieme puissance de cet exposant. Donc, si l'on élève 3 à sa neuvieme puissance, (que l'on trouvera de 19683), & si l'on divise ensuite 137781 par cette neuvieme puissance, le quotient 7 sera le premier terme; & par conséquent, le prix demandé du premier tableau.

QUESTION VI.

398. *Une personne a dépensé 9450 livres en six ans, de maniere que la dépense de la seconde année a été double de celle de la premiere; la dépense de la troisieme année, double de celle de la seconde; & ainsi de suite. On demande combien cette personne a dépensé chaque année.*

N. 332. *SOLUTION.* Il s'agit de trouver tous les termes d'une progression, qui en a 6, dont la somme de tous ces termes est 9450, & dont l'exposant du rapport du second au premier est 2. Or (n), ces termes sont proportionnels à ceux de telle autre proportion que l'on veuille prendre, pourvu qu'elle soit semblable à celle dont il s'agit; c'est-à-dire, pourvu qu'elle ait

le même exposant. Donc, si l'on prend cette progression, par exemple, $\div 1. 2. 4. 8. 16. 32$; la somme 63 de tous ses termes sera à son premier terme, ce que la somme 9450 de la progression demandée, est aussi à son premier terme. Par conséquent, si l'on cherche (n) le quatrième N. 364. terme 150 de cette proportion, $63 : 1 :: 9450 : *$, ce quatrième terme sera le premier de la progression demandée. Or, lorsque l'on connoîtra ce premier terme, on trouvera facilement les cinq autres; & par conséquent, ce que la personne proposée a dépensé chaque année.

QUESTION VII.

399. *Un particulier dit que si l'on vouloit lui acheter son cheval, à condition de lui payer 3 deniers du premier clou de ses fers, 6 du second, 12 du troisième, & ainsi de suite; il le vendroit 13107 l. 3 sols 9 den. On demande combien ce cheval a de clous à ses fers.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 3; la somme de tous les termes, 3145725 deniers; & l'exposant 2 du rapport du second terme au premier.

Or (n), dans une progression dont le N. 387.

second terme est double du premier ; le dernier terme moins le premier , est égal à la somme de tous ceux qui le précédent. Donc , la somme 3145725 de tous les termes de la progression dont il est ici question , est composée du dernier terme , plus du même dernier terme moins le premier. Par conséquent , si l'on ajoute à cette somme le premier terme , lequel est 3 , on aura une somme 3145728 , qui sera le double de ce dernier terme. Mais , puisque 3145728 est le double du dernier terme , sa moitié 1572864 est ce dernier terme.

Ainsi , il ne s'agit plus que de trouver le nombre des termes d'une progression , dont on connoît le premier terme 3 , le dernier 1572864 , avec l'exposant 2 du rapport du second au premier ; ce qui fait une question toute semblable à la quatrième.





LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIEME.

A P R È S avoir enseigné la doctrine des rapports en général, dans le Livre précédent, il s'agit d'appliquer dans celui-ci cette doctrine, aux lignes droites, aux surfaces planes & aux angles. Ainsi, Euclide le commence par démontrer ce que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont les uns à l'égard des autres ; & du rapport que ces figures ont entr'elles, il conclut celui qui se trouve entre les triangles, lorsqu'ils sont dans le même cas. Il examine ensuite les conditions que les triangles doivent avoir, pour être semblables ; & donne la maniere de se servir de ceux qui le sont, non-seulement pour résoudre tous les problèmes

qui concernent les lignes proportionnelles ; mais aussi pour tracer une figure qui soit semblable à telle figure rectiligne que l'on veuille proposer. Il considère ensuite les figures réciproques , & en déduit une des propriétés les plus considérables des lignes proportionnelles. Enfin , il compare entr'elles les figures semblables , pour en déterminer les rapports ; & après avoir rendu générale la quarante - septieme proposition du premier Livre , il termine celui-ci par enseigner les rapports que les Secteurs ont entr'eux.

On en a aussi supprimé quelques propositions inutiles. Mais on leur en a substitué d'autres qui rendent la théorie du cercle beaucoup plus complete. On a marqué d'un astérisque celles qui ne sont point d'Euclide ; & de deux , celles qui sont de l'Auteur.



D É F I N I T I O N S.

400. **O**N nomme figures *semblables*, celles dont les angles sont égaux, chacun à chacun; & dont les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels.

Les figures ABC & DEF sont sem-* Fig. 1.
blables, si l'angle A étant égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; AB est à DE, ce que AC est à DF, ce que BC est à EF.

401. On nomme côtés *homologues*, ou côtés *pareils*, ceux qui dans les figures semblables, sont opposés aux angles égaux.

Le côté AB est homologue au côté DE;* Fig. 1.
le côté AC, au côté DF; & le côté BC, au côté EF.

402. On dit de deux figures, qu'elles sont *réci-proques*, lorsque les dimensions de l'une sont les extrêmes d'une proportion, dont les dimensions de l'autre sont les moyens.

Les figures AC & EG sont réci-pro-* Fig. 2.
ques, si $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$.

403. On dit d'une ligne droite, qu'elle

est divisée en *moyenne & extrême raison*, lorsqu'étant divisée en deux parties, toute cette ligne est à la plus grande de ces deux parties, ce que cette plus grande partie est à la plus petite.

Fig. 3. La ligne AB^* est divisée en moyenne & extrême raison au point C , si $AB. AC :: AC. CB$.

On donne ce nom à une ligne ainsi divisée ; parce que les extrêmes & le moyen de la proportion sont dans cette même ligne.

404. On appelle *hauteur* d'une figure ; la perpendiculaire abaissée du sommet de cette figure à sa base, prolongée s'il est nécessaire.

Fig. 4. La perpendiculaire FE^* est la hauteur de la figure AC .

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

405. Les parallélogrammes, qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases.

Fig. 5. SI les hauteurs des parallélogrammes AC^* & EG sont égales, le premier est au second, ce que AB est à EF .

Const. Divisez (n) la plus petite AB ^{N. 94.} des deux bases AB & EF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en quatre parties égales AI, IL, &c. Prenez sur la base EF, une partie EP égale à la partie AI. Enfin (n), ^{N. 133.} tirez par chaque point de division I, L, &c. les paralleles IK, LM, &c. au côté AD; & par le point P, la parallele PQ au côté EH.

Démonst. Les parallélogrammes AK, IM, LO, NC & EQ sont égaux (n); ^{N. 153.} puisqu'ils ont des bases égales [C], & des hauteurs égales [H]. Ainsi, le parallélogramme AC est 4 fois le parallélogramme EQ; de même que la base AB est 4 fois la partie EP. Par conséquent, $AC : EQ :: AB : EP$ (n). ^{N. 359.}

Or, la partie EP est contenue un certain nombre de fois dans la base EF, ou exactement, ou avec un reste.

Si elle y est contenue exactement un certain nombre de fois; par exemple, 6 fois.

Divisez cette base EF en 6 parties égales EP, PR, &c. & par chaque point de division P, R, &c. tirez (n) les paralleles ^{N. 133.} PQ, RS, &c. au côté EH.

Ces paralleles divisent le parallélogramme EG en six parallélogrammes EQ, PS, &c, qui sont égaux (n). Ainsi, ^{N. 153.}

la base EF est 6 fois la partie EP ; de même que le parallélogramme EG est 6 fois le parallélogramme EQ. Par conséquent,
 N. 359. $EQ . EG :: EP . EF$ (n).

Mais , si elle y est contenue un certain nombre de fois , avec un reste ; par exemple 6 fois , avec un reste qui en soit , par exemple , les $\frac{2}{3}$.

Divisez cette même base EF en 20 parties égales† ; & par chaque point de division
 N. 133. tirez (n) des paralleles au côté EH.

Ces paralleles diviseront le parallélogramme EG en 20 parallélogrammes , qui
 N. 153. seront égaux (n). Or , la partie EP contiendra alors 3 des 20 parties égales de la base EF ; de même que le parallélogramme EQ contiendra 3 de ces 20 parallélogrammes égaux. Par conséquent , on aura encore , de même que dans le cas précédent,
 N. 359. $EQ . EG :: EP . EF$ (n).

Ainsi [D] , on a ces deux proportions ,
 $AC . EQ :: AB . EP$; & $EQ . EG :: EP . EF$; or , ces deux proportions en font une
 N. 341. d'égalité ordonnée (n). Donc , $AC . EG ::$
 N. 388. $AB . EF$ (n).

Par conséquent , C. Q. F. D.

† On divise ici en 20 parties égales ; parce que 6 entiers & $\frac{2}{3}$ font $\frac{20}{3}$.

COROLLAIRE I.

406. Il suit de ce théorème, que *les triangles qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

Les triangles ABC * & DEF dont les Fig. 6.
hauteurs sont égales, sont entr'eux ce que AC est à DF.

Const. Des points A & B, F & E, tirez (n) N. 133.
les paralleles AG & BG, FH & EH aux
côtés CB & CA, DE & DF, chacune
à chacun.

Démonst. Les parallélogrammes CG &
DH sont entr'eux, ce que AC est à DF (n); N. 405.
puisqu'ils ont des hauteurs égales [H]. Or,
les triangles ABC & DEF sont les moitiés
de ces parallélogrammes (n). Donc, ils N. 159.
sont aussi entr'eux, ce que AC est à
DF (n). N 359.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

407. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'un polygone régulier quelconque, est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale à une perpendiculaire tirée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés; & la base, à la circonférence de ce même polygone.*

Fig. 7 La surface d'un polygone régulier quelconque , par exemple celle du pentagone régulier ACE *, est égale à celle du triangle FGH , dont la hauteur GL est égale à la perpendiculaire IK ; & la base FH , à la circonférence ABCDEA.

Const. Tirez du centre I à chaque angle A , B , C , &c. les lignes droites IA , IB , IC , &c.

Démonst. La surface du polygone ACE est quintuple de celle du triangle EID ; puisque les triangles EID , DIC , CIB , N. 88. BIA & AIE , sont égaux (n). Mais , la surface du triangle FGH est aussi quintuple N. 406. de celle du même triangle EID (n) ; puisque les hauteurs GL & IK sont égales [H] , de même que la base FH & la circonférence ABCDE. Donc , la surface du polygone N. 67. ACE est égale à celle du triangle FGH (n).

Or , la même démonstration subsiste , quel que soit le nombre des côtés d'un polygone régulier.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

408. Il suit de ce second corollaire , que la surface d'un cercle , est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon de ce cercle ; & la base , à la circonférence de ce même cercle.

Démonst. Plus un polygone régulier a de côtés, moins il differe du cercle dans lequel il est inscrit. Et quelque grand que l'on imagine le nombre de ces côtés, on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre, & qui differe par conséquent encore moins de ce cercle, sans que l'imagination puisse jamais épuiser, ni la multitude de ces côtés, ni cette approximation au cercle.

Or, si sans déterminer la multitude des côtés d'un polygone régulier, on en imagine un qui en ait un si grand nombre, que sa différence au cercle dans lequel il seroit inscrit, devienne absolument insensible; ce polygone se confondroit avec ce cercle, de maniere que l'on pourroit, même en rigueur, prendre indifféremment le polygone pour le cercle, & le cercle pour le polygone.

Mais (n), la surface de ce polygone, N. 407. quel qu'il fût, seroit égale à celle d'un triangle dont la hauteur seroit égale à une perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés; & la base, à la circonférence de ce même polygone.

Donc, puisque cette surface, cette perpendiculaire, & cette circonférence, pourroient être prises pour la surface, le rayon, & la circonférence du cercle dans

lequel ce même polygone seroit inscrit ; on peut en conclure que la surface de ce cercle est aussi égale à celle d'un triangle , dont la hauteur seroit égale au rayon de ce cercle ; & la base , à la circonférence de ce même cercle.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

409. Il suit de ce dernier corollaire , & du n^o 160 , que *la surface d'un cercle , est égale au produit de la circonférence de ce cercle multipliée par la moitié de son rayon ; ou , ce qui revient au même , au produit de sa demi-circonférence multipliée par son rayon.*

On verra au n^o 444, la maniere de mesurer la circonférence d'un cercle.

SCHOLIE.

410. Si nous disons , dans le corollaire précédent , que le cercle & le polygone inscrit seront confondus ensemble , de maniere que l'on pourra prendre indifféremment l'un pour l'autre ; nous ne prétendons point faire entendre par-là , que ce cercle soit lui-même ce polygone ; puisque , quoi que l'on en dise , cela ne peut jamais être.

En effet, si les cercles étoient, comme on le dit ordinairement, des polygones d'une infinité de côtés; un cercle ne seroit plus grand qu'un autre, que parce qu'il seroit, ou un polygone d'un plus grand nombre de côtés, ou un polygone dont les côtés seroient plus grands.

Or, premièrement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point parce qu'il est un polygone d'un plus grand nombre de côtés; puisque, si cela étoit, les cercles ne seroient point des figures semblables.

Secondement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point non plus parce qu'il est un polygone dont les côtés sont plus grands; puisque, si cela étoit, un cercle ne seroit, par exemple, 10000 fois plus grand qu'un autre, que parce que ce cercle & cet autre seroient deux polygones, dont chaque côté du grand seroit centuple de chaque côté du petit. Or, ce côté centuple auroit un milieu: & ce milieu, par exemple K^* , ne se confondroit point avec les extré- Fig. 7. mités E & D ; puisqu'il en seroit réellement éloigné de part & d'autre, de 50 parties, égales chacune au côté du petit polygone. Ainsi (n), la ligne droite IE , qui seroit N. 113. tirée du centre I à l'extrémité E , seroit rigoureusement plus grande que la perpendi,

culaire IK , abaissée du même centre I au milieu K du côté ED . Par conséquent, toutes les lignes droites qui seroient tirées du centre à la circonférence, ne seroient point rigoureusement égales.

Et si l'on objecte que ce polygone ayant une infinité † de côtés, ces 50 parties égales sont absolument insensibles; nous prendrons un polygone dix millions de fois plus grand, cent millions de fois plus grand; si grand enfin, que l'on sera forcé d'avouer que toutes les lignes droites qui seront tirées de son centre à sa circonférence, ne seront plus rigoureusement égales ¶. Or, une figure, dans laquelle toutes les lignes droites, que l'on peut tirer du centre à la circonférence, ne sont point rigoureusement égales, n'est point un cercle.

Donc, il n'y a point de milieu. Ou les

† Que le nom d'*infini* ne fasse point illusion. Ce n'est qu'un terme que les Géomètres emploient assez ordinairement pour résoudre de certaines questions; comme les Philosophes se servent de celui d'*instinct*, pour exprimer la nature de l'ame des bêtes.

¶ Il ne faut pas dire que l'excès du rayon IE sur le rayon IK , étant insensible dans un petit cercle, il le sera de même dans un grand; parce que son accroissement sera toujours proportionnel à celui des rayons. Il est vrai que cet accroissement sera proportionnel: mais, il est vrai aussi, en Géométrie comme en Physique, que ce qui est insensible dans le petit, devient très-considérable dans le grand. La millieme partie d'un pouce est absolument insensible: la millieme partie d'une lieue est de 13 pieds 8 pouces, & plus.

cercles ne sont point des figures semblables ; ou il y a des cercles dont les rayons ne sont point rigoureusement égaux ; ou enfin , les cercles ne sont point des polygones.

Mais , premièrement , c'est une des vérités les plus incontestables de la Géométrie , que les cercles sont des figures semblables : secondement , par la définition du cercle (n), N. 28. on ne peut admettre pour cercle , qu'une figure plane dans laquelle toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence , sont rigoureusement égales. Donc , les cercles ne sont point des polygones.

Par conséquent , C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

411. Une ligne droite qui est parallèle à l'un des côtés d'un triangle , coupe les deux autres côtés proportionnellement : & si elle coupe deux côtés proportionnellement , elle est parallèle au troisième.

PREMIÈREMENT. Dans le triangle Fig. 3. ABC* , la parallèle DE au côté AC , donne cette proportion , BD . DA :: BE , EC.

Const. Tirez du point A au point E, la ligne droite AE ; & du point D au point C, la ligne droite DC.

Démonst. Les triangles BED & DEA ont chacun le même point E pour sommet ; & leurs bases BD & DA sont chacune sur la même ligne droite BA. Ainsi, ils ont chacun la même hauteur ; & par conséquent, BD est à DA, ce que le triangle BED est au triangle DEA (n).
N. 406.

Pareillement, les triangles BED & EDC ont chacun le même point D pour sommet ; & leurs bases BE & EC sont chacune sur la même ligne droite BC. Ainsi, ils ont aussi chacun la même hauteur ; & par conséquent, BE est à EC, ce que le triangle BED est au triangle EDC (n).
N. 406.

Or, le triangle BED a le même rapport au triangle DEA qu'au triangle EDC (n), puisque ces deux derniers triangles qui ont la même base DE, & qui sont entre les mêmes parallèles DE & AC [H],
N. 154. sont égaux (n).

N. 350. Donc, $BD : DA :: BE : EC$ (n).
Par conséquent, C. Q. F. D.

SECONDEMENT. Dans le triangle
Fig. 8. ABC *, si $BD : DA :: BE : EC$, la ligne DE est parallèle au côté AC.

Const. La même que la précédente.

Démonst.

Démonst. Par les mêmes raisons que dans la démonstration précédente, le triangle BED est au triangle DEA, ce que BD est à DA. Or, $BD : DA :: BE : EC$ [H]; & BE est à EC, ce que le triangle BED est au triangle EDC. Donc, le triangle BED a le même rapport au triangle DEA qu'au triangle EDC (n). Par N. 350. conséquent, ces deux derniers triangles sont égaux (n). N. 356.

Or, puisque ces deux derniers triangles qui sont sur la même base DE, sont égaux, la ligne droite AC, qui est tirée du sommet A de l'un au sommet C de l'autre, est parallèle à cette base (n). N. 157.

Donc, C. Q. F. 2^o D.



PROPOSITION III.

THÉORÈME.

412. Si une ligne droite divise en deux parties égales l'un quelconque des angles d'un triangle, les parties en lesquelles elle divise le côté qu'elle rencontre, sont proportionnelles aux deux autres côtés : & si ces parties sont proportionnelles aux deux autres côtés, elle divise l'angle en deux parties égales.

PREMIÈREMENT. La ligne droite
Fig. 9. BD * qui divise en deux parties égales ABD & CBD l'angle B du triangle ABC, donne cette proportion, AD . DC :: AB . BC.

Const. Prolongez le côté AB vers E, jusqu'à ce que le prolongement BE soit égal au côté BC. Tirez du point E au point C, la ligne droite EC.

Démonst. L'angle ABC est extérieur au
N. 135. triangle EBC. Ainsi (n), il est égal à la somme des angles intérieurs BCE & E qui lui sont opposés. Or, ces angles intérieurs sont égaux (n); puisque les côtés BE & BC du triangle EBC le sont [C].
N. 84. Donc, l'angle ABC est double de chacun

de ces mêmes angles; & par conséquent, de l'angle BCE.

Mais, le même angle ABC est aussi double de l'angle CBD [H]. Donc, les angles BCE & CBD sont égaux (n). N. 68. Ainsi, puisqu'ils sont alternes, la ligne BD est parallèle au côté EC du triangle AEC (n). Par conséquent, $AD : DC :: AB : BE$ (n). Or, BE est égal à BC [C]. N. 411. Donc, $AD : DC :: AB : BC$.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Si $AD^* : DC :: AB : BC$, la ligne droite BD divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD. Fig. 9.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Puisque $AD : DC :: AB : BC$ [H], & que BE est égal à BC [C], la ligne BD coupe proportionnellement les côtés AC & AE du triangle AEC. Par conséquent, elle est parallèle au côté EC (n). N. 411.

Ainsi, les angles ABD & CBD sont égaux (n), l'un à l'angle intérieur E qui lui est opposé, & l'autre à l'angle BCE qui lui est alterne. Or, ces deux derniers angles sont égaux (n), puisque les côtés BC & BE du triangle EBC le sont [C]. N. 130. N. 84.

N. 62. Donc , les deux premiers le sont aussi (n).
Par conséquent , C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

413. *Les triangles qui sont équiangles , ont leurs côtés pareils proportionnels.*

Fig. 10. SI dans les triangles ABC * & CDE , l'angle B est égal à l'angle D , l'angle BCA à l'angle E , & l'angle A à l'angle DCE , on a cette proportion , AC . CE :: AB . CD :: BC . DE.

Const. Posez les triangles ABC & CDE sur une même ligne droite AE ; de manière que les angles égaux DCE & A étant opposés , les angles égaux BCA & E le soient aussi. Prolongez ensuite les côtés AB & ED , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point F.

N. 128. *Démonst.* Les lignes BC & FE sont parallèles (n) ; puisque [H] l'angle extérieur BCA est égal à l'intérieur E qui lui est opposé. Or , il en est de même des lignes CD & AF ; puisque [H] l'angle extérieur DCE est aussi égal à l'intérieur A qui lui est aussi opposé. Donc , le quadrilatère N. 17. BD est parallélogramme (n) ; & par con-

féquent , les côtés CD & BF font égaux ,
de même que les côtés BC & FD (n). N. 143.

Ainsi , la ligne BC est parallele au côté
FE du triangle AFE [c]. Donc , AC .
CE :: AB . BF (n). Par conséquent , puis- N. 411.
que les lignes CD & BF sont égales [D] ,
AC . CE :: AB . CD.

Pareillement , la ligne CD est aussi pa-
rallele au côté AF du triangle AFE [c].
Donc , AC . CE :: FD . DE (n). Par N. 411.
conséquent , puisque les lignes BC & FD
font égales [D] , AC . CE :: BC . DE.

Donc , C. Q. F. D.

SCHOLIE.

414. *Les Commengans n'auront aucune
difficulté à ranger proportionnellement les
côtés de deux triangles équiangles , si pour
former chaque rapport ils prennent toujours
un côté du premier triangle & un côté du
second , qui soient opposés à des angles
égaux.*

USAGE.

415. *Lorsqu'un triangle dans lequel on
ne connoît qu'un côté , est équiangle à quel-
que autre triangle dont les trois côtés sont
connus , il est facile de trouver chacun des
deux côtés inconnus. Car , puisque les côtés
des triangles équiangles sont proportion-*

N. 4³. nels (n) , ces côtés inconnus sont les quatriemes termes de deux proportions, dont les autres termes sont les côtés connus de ces mêmes triangles.

Ainsi, si l'on sçait que dans le triangle
 Fig. 11. ABC^* les côtés AC , AB & BC sont, par exemple, l'un de 9 parties égales, l'autre de 6, & le dernier de 5; & si dans le triangle DEF qui est équiangle au triangle ABC , on connoît que le côté DF est, par exemple,
 N. 364. de 27 toises : on trouve (n) que le côté DE est de 18 toises, & le côté EF de 15; puis-
 N. 4³. que (n) AC , (9) . DF , (27) :: AB , (6).
 DE , (18) :: BC , (5) . EF , (15).

Au reste, il faut remarquer que cette proposition est de toutes les propositions de la Géométrie, celle qui est la plus considérable, & dont on fait le plus fréquemment usage. C'est sur elle que toute la Trigonométrie est fondée; particulièrement le *Traité* que j'en ai donné, & qui se trouve à Paris, chez JOMBERT, fils aîné, rue Dauphine.



PROPOSITION V.

THÉORÈME.

416. *Les triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont équiangles.*

DANS les triangles ABC * & DEF, si Fig 12.
 $AC . DF :: AB . DE :: BC . EF$; l'angle
 B est égal à l'angle E, l'angle C à l'angle
 EFD, & l'angle A l'angle EDF.

Const. Décrivez sous la ligne DF (n), N. 119
 l'angle GDF qui ait le point D pour som-
 met, & soit égal à l'angle A; & l'angle
 GFD qui ait le point F pour sommet, &
 soit égal à l'angle C.

Démonst. Les triangles ABC & DGF
 sont équiangles [C]. Ainsi, $AB . DG ::$
 $AC . DF$ (n). Mais, $AC . DF :: AB .$ N. 413.
 DE [H]. Donc, $AB . DG :: AB . DE$
 (n); & par conséquent, DG est égal à N. 350.
 DE (n). N. 356.

Pareillement, $BC . FG :: AC . DF$ (n); N. 413.
 mais, $AC . DF :: BC . EF$ [H]. Donc,
 $BC . FG :: BC . EF$ (n); & par consé- N. 350.
 quent, FG est égal à EF (n). N. 356.

Ainsi, les triangles DEF & DGF ont
 les côtés égaux aux côtés, chacun à cha-
 cun. Donc, ces triangles sont équiangles

N. 88. (n). Or, les triangles DGF & ABC le font aussi [c]. Donc, les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF, sont
 N. 62. égaux, chacun à chacun (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

417. *Les triangles qui ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle, proportionnels à ceux qui forment ce second angle, sont équiangles.*

Fig. 12. **D**ANS les triangles ABC * & DEF, dont l'angle A est égal à l'angle EDF, si $AC : DF :: AB : DE$; l'angle B est égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD.

Const. La même que celle de la proposition précédente.

Démonst. Dans les triangles DEF & DGF, l'angle EDF est égal à l'angle
 N. 62. GDF (n); puisque l'un [H], & l'autre [C], sont égaux au même angle A: le côté DE est égal au côté DG, par une démonstration toute pareille à celle de la proposition précédente; & le côté DF est commun. Donc, l'angle EFD est égal à
 N. 82. l'angle GFD, & l'angle E à l'angle G (n).

Par conséquent, ces deux triangles sont équiangles.

Mais les triangles ABC & DGF le sont aussi [C]. Donc, les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF, sont égaux, chacun à chacun (n). N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

418. *Enfin, deux triangles sont encore équiangles, lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, les côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du premier, proportionnels aux côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du second; & le troisieme angle du premier, de même espece que le troisieme angle du second.*

LES triangles ABC * & DEF, dont Fig. 13.
l'angle B est égal à l'angle E, & l'angle C de même espece que l'angle EFD, sont équiangles; si $AB . DE :: AC . DF$.

Const. Prolongez le côté EF vers G, à volonté. Tirez du point D aux points G & H, pris à volonté, l'un au dessous du point

R v

F, & l'autre au dessus, les lignes droites DG & DH.

Démonst. Si l'angle A est égal à l'angle EDF, les triangles ABC & DEF sont
 N. 137. équiangles (n). Ainsi, il s'agit de démontrer que ces deux angles sont égaux.

Or, l'angle A n'est point égal à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC &
 N. 137. DEG seroient équiangles (n). Ainsi, le rapport de AB à DE, qui est égal à celui de AC à DF [H], le seroit aussi à celui de
 N. 413. AC à DG (n). Donc, AC auroit à DF
 N. 350. le même rapport qu'à DG (n). Par con-
 N. 356. séquent, DF seroit égal à DG (n).

Mais, si DF étoit égal à DG, le triangle FDG seroit isoscele. Donc, l'angle EFD
 N. 97. seroit obtus (n), puisque les angles DFG
 N. 105. & G seroient nécessairement aigus (n). Par conséquent, l'angle C, qui seroit égal à l'angle G, & l'angle EFD ne seroient point de même espece.

L'angle A n'est point non plus égal à un angle EDH, plus petit que l'angle EDF; puisque, s'il l'étoit, les triangles
 N. 137. ABC & DEH seroient équiangles (n). Ainsi, le rapport de AB à DE, qui est égal à celui de AC à DF [H], le seroit
 N. 413. aussi à celui de AC à DH (n). Donc, AC auroit à DF le même rapport qu'à

DH (n). Par conséquent, DF seroit égal N. 350.
à DH (n). N. 356.

Mais, si DF étoit égal à DH, le triangle FDH seroit isoscele. Donc, l'angle EHD seroit obtus (n), puisque les angles N. 97. DHF & EFD seroient nécessairement aigus (n). Par conséquent, l'angle C, qui N. 105. seroit égal à l'angle EHD, & l'angle EFD ne seroient point encore de même espece.

Or, ces angles C & EFD doivent être de même espece [H]. Donc, l'angle A n'est égal, ni à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; ni à un angle EDH, plus petit que ce même angle. Donc, les angles A & EDF sont égaux; & par conséquent, les triangles ABC & DEF sont équiangles.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

419. Il suit du n^o 400, & des n^o 413, 416, 417 & 418, que *dans tous les cas auxquels les triangles sont équiangles, ils sont semblables.*



PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

420. *La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.*

Fig. 14. **L**A perpendiculaire BD^* divise le triangle rectangle ABC en deux triangles ADB & BDC , qui sont semblables au triangle ABC .

Démonst. Dans les triangles ABC & ADB , qui sont rectangles, l'un en B & l'autre en D [H], l'angle A est commun. Donc, l'angle C est égal à l'angle ABD
N. 137. (n).

Pareillement, dans les triangles ABC & BDC , qui sont aussi rectangles, l'un en B & l'autre en D [H], l'angle C est commun. Donc, l'angle A est égal à
N. 137. l'angle CBD (n).

Or, puisque les triangles ABC , ADB & BDC sont équiangles, ils sont sembla-
N. 419. bles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Il fuit de ce théorème : premièrement, que la perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, est moyenne proportionnelle entre les segmens de ce côté.

Dans le triangle ABC* qui est rectangle en B, la perpendiculaire DB donne cette proportion, $AD \cdot DB :: DB \cdot DC$. Fig. 14.

Démonst. Les triangles ADB & BDC, sont équiangles (n). Ainsi, $AD \cdot DB :: DB \cdot DC$ (n). N. 420.
N. 413.

Secondement, que dans un triangle rectangle, chaque côté est moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment avec lequel il a un point de commun.

Dans le triangle précédent*, la perpendiculaire DB donne ces deux proportions, $AC \cdot AB :: AB \cdot AD$, & $AC \cdot BC :: BC \cdot DC$. Fig. 14.

Démonst. Les triangles ABC & ADB, sont équiangles (n). Ainsi, $AC \cdot AB :: AB \cdot AD$ (n). N. 420.
N. 413.

Pareillement, les triangles ABC & BDC sont équiangles (n). Ainsi, $AC \cdot BC :: BC \cdot DC$ (n). N. 420.
N. 413.

** Troisièmement, enfin, que dans un triangle rectangle, les côtés sont moyens

proportionnels entre l'hypothénuse & la perpendiculaire.

Démonst. Dans le même triangle pré-
Fig. 14. cédent *, on a encore cette proportion ;
 $AC . AB :: BC . DB$.

Démonst. Les triangles ABC & ADB
N. 420. sont équiangles (n). Ainsi, $AC . AB ::$
N. 413. $BC . DB$ (n).

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

422. *Couper telle partie que l'on voudra d'une ligne droite donnée.*

IL faut couper, par exemple, les trois
Fig. 15. cinquièmes de la ligne droite AB *.

Const. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AH, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque HAB. Ensuite, puisque l'on demande des cinquièmes, prenez à volonté sur la ligne AH, 5 parties égales AC, CD, &c. Du point G, auquel la cinquième partie se termine, tirez au point B, la ligne droite GB. Enfin, parce que l'on de-
N. 133. mande 3 parties, tirez (n) de l'extrémité

E de la troisieme partie, la parallele EI à la ligne GB. La partie AI sera les $\frac{3}{7}$ demandés.

Démonst. Puisque les lignes EI & GB sont paralleles [C], l'angle extérieur AIE est égal à son opposé intérieur ABG (n). N. 130. Ainsi, les triangles AEI & AGB, qui ont l'angle A de commun, sont équiangles (n). Par conséquent, AE . AG :: AI . AB (n). N. 137. N. 413.

Or, la partie AE est les $\frac{3}{7}$ de la ligne AG [C]. Donc, la partie AI est aussi les $\frac{3}{7}$ de la ligne AB (n). N. 330.

Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

423. *Diviser une ligne droite, de la même maniere dont une autre ligne droite est divisée.*

IL faut diviser la ligne droite AB*, de Fig. 16. la même maniere dont la ligne droite CD est divisée.

Const. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AI, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI.

Prenez sur cette ligne AI, la partie AG égale à la partie CK, la partie AH égale à la partie CL, & la partie AI égale à la ligne CD. Tirez du point I au point B, N. 133. la ligne droite IB. Enfin (n), tirez des points G & H, les paralleles GE & HF à la ligne IB. Les segmens AE & AF, sont les parties demandées.

Démonst. Puisque les lignes GE, HF & IB sont paralleles [C], les angles extérieurs AGE & AHF sont égaux chacun N. 130. (n) à l'angle intérieur AIB qui leur est opposé. Ainsi, les triangles AEG, AFH & ABI, qui ont l'angle A de commun, N. 137. sont équiangles (n). Par conséquent, AE. AB :: AG. AI; & AF. AB :: AH. N. 413. AI (n).

Mais, les parties CK & CL & la ligne CD, sont égales aux parties AG, AH & AI, chacune à chacune [C]. Donc, AE. AB :: CK. CD; & AF. AB :: N. 61. CL. CD (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

424. *Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes droites données.*

IL faut trouver une troisieme proportionnelle aux deux lignes droites A * & B. Fig. 17.

Const. Tirez deux lignes droites indéfinies DE & DC, qui forment un angle quelconque CDE. Prenez sur la ligne DE, la partie DF égale à la ligne A, & la partie FG égale à la ligne B. Prenez aussi sur la ligne DC, la partie DH égale à la même ligne B. Tirez du point F au point H, la ligne droite FH. Enfin (n), tirez du point G, la parallele GI à la ligne FH. Le segment HI sera la troisieme proportionnelle demandée. 133.

Démonst. Dans le triangle DIG, la ligne FH est parallele au côté GI [c]. Ainsi, DF . FG :: DH . HI (n). Par conséquent, puisque les lignes A & B sont égales, l'une au segment DF, & l'autre à chacun des segments FG & DH [c], on a cette proportion, A . B :: B . HI (n). N. 411. N. 61.

Donc, C. Q. F. F.



PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

425. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes droites A *, B & C.
 Fig. 18.

Const. Tirez deux lignes droites indéfinies EF & ED, qui forment un angle quelconque DEF. Prenez sur la ligne EF, la partie EG égale à la ligne A, & la partie GH égale à la ligne B. Prenez aussi sur la ligne ED, la partie EI égale à la ligne C. Tirez du point G au point I, N. 133. la ligne droite GI. Enfin (n), tirez du point H, la parallele HK à la ligne GI. Le segment IK fera la quatrieme proportionnelle demandée.

Démonst. Dans le triangle EKH, la ligne GI est parallele au côté HK [c].
 N. 411. Ainsi, $EG : GH :: EI : IK$ (n). Par conséquent, puisque les lignes A, B & C sont égales aux segmens EG, GH & EI, chacune à chacun [c], on a cette proportion,
 N. 61. $A : B :: C : IK$ (n).

Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

426. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.*

IL faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A * & B. Fig. 19.

Const. Tirez une ligne droite indéfinie CD. Prenez sur cette ligne, la partie CE égale à la ligne A, & la partie EF égale à la ligne B. Divisez (n) la partie CF N. 93. en deux parties égales CG & GF. Du point G, pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales, prise pour rayon, décrivez le demi-cercle CHF. Enfin (n), N. 95. du point E, élevez dans ce même demi-cercle, la perpendiculaire EH à la ligne CD. Cette perpendiculaire sera la moyenne demandée.

Pour la démonstration. Tirez du point H aux points C & F, les lignes droites HC & HF.

Démonst. L'angle CHF est un angle droit (n), puisqu'il est inscrit dans le demi- N. 263. cercle CHF [C]. Ainsi, la ligne EH est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit du triangle rectangle CHF au côté opposé

- N. 421. CF [C]. Par conséquent , CE . EH :: EH . EF (n). Mais les lignes A & B sont égales l'une au segment CE , & l'autre au segment EF [C]. Donc , A . EH :: EH . B (n).

Par conséquent , C. Q. F. F.

SCHOLIE.

427. Il est quelquefois nécessaire de trouver plus d'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données : mais , il est démontré qu'il n'est point possible de le faire par la Géométrie élémentaire. Cependant , plusieurs personnes , qui en toute autre chose ne manquent point de bon sens , le cherchent toujours avec ardeur , de même que la trisection de l'angle , la quadrature du cercle , &c. Il est bon que les jeunes gens sachent , qu'indépendamment de la présomption ridicule qu'il y a à faire ces sortes de recherches , il y a mille contre un à parier , que quiconque se flatte de faire de pareilles découvertes , ne sçait pas les premiers élémens de la Géométrie.

La proposition dans laquelle il ne s'agit de trouver que deux moyennes proportionnelles , est connue sous le nom de problème de la duplication du cube.



PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

428. *Les parallélogrammes équiangles dont les surfaces sont égales , ont leurs côtés réciproquement proportionnels : & ceux dont les côtés sont réciproquement proportionnels , ont leurs surfaces égales.*

PREMIÈREMENT. Les parallélogrammes DB * & CF qui sont équiangles , & dont les surfaces sont égales , donnent cette proportion , $DC . CE :: CG . CB$. Fig. 20.

Const. Disposez ces parallélogrammes de maniere que les côtés CE & CG de l'un , deviennent les prolongemens des côtés DC & BC de l'autre. Prolongez ensuite les côtés AB & FE , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H.

Démonst. Le rapport du côté DC au côté CE , est égal à celui du parallélogramme DB au parallélogramme CH (n) : N. 405. le rapport du parallélogramme DB au parallélogramme CH , est égal à celui du parallélogramme CF au même parallélogramme CH (n) ; puisque les parallélogrammes DB & CF sont égaux [H] : en-

fin, ce dernier rapport, est égal à celui

N. 405. du côté CG au côté CB (n). Donc, DC.

N. 350 CE :: CG . CB (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Les surfaces des pa-
Fig. 20. rallélogrammes équiangles DB* & CF
sont égales, si DC . CE :: CG . CB.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le rapport du parallélogramme
DB au parallélogramme CH, est égal à
N. 405 celui du côté DC au côté CE (n); le
rapport du côté DC au côté CE, est égal
à celui du côté CG au côté CB [H]: enfin,
ce dernier rapport est égal à celui du paral-
lélogramme CF au parallélogramme CH
N. 405. (n). Donc, les deux parallélogrammes DB
& CF ont chacun le même rapport au pa-
N. 350. rallélogramme CH (n). Par conséquent,
N. 356. ils sont égaux (n).

Donc, C. Q. F. 2^o D.



PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

429. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, & dont les surfaces sont égales, ont les côtés qui forment ces angles égaux réciproquement proportionnels; & ceux dont les côtés qui forment des angles égaux sont réciproquement proportionnels, ont leurs surfaces égales.

PREMIÈREMENT. Les triangles ABC * Fig. 21. & EDC qui ont l'angle ACB égal à l'angle DCE, & dont les surfaces sont égales, donnent cette proportion, $AC \cdot CD :: EC \cdot CB$.

Const. Disposez ces triangles de manière que les côtés CD & CE de l'un, deviennent les prolongemens des côtés AC & BC de l'autre. Tirez ensuite du point B au point D, la ligne droite BD.

Démonst. Le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD (n): le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle EDC au même triangle CBD (n); puisque les triangles ABC & EDC sont égaux [H]: enfin, ce dernier

rapport est égal à celui du côté EC au
 N. 406. côté CB (n). Donc, $AC : CD :: EC : CB$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 21. SECONDEMENT. Les surfaces des triangles ABC* & EDC dont l'angle ACB est égal à l'angle DCE, sont égales, si $AC : CD :: EC : CB$.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du côté
 N. 406. AC au côté CD (n); le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du côté EC au côté CB [H]. Enfin, ce dernier rapport est égal à celui du triangle EDC
 N. 406. au triangle CBD (n). Donc, les deux triangles ABC & EDC, ont chacun le
 N. 350. même rapport au triangle CBD (n). Par
 N. 356. conséquent, ils sont égaux (n).

Donc, C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

430. Si quatre lignes droites sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyennes : & si quatre lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal à celui des moyennes, elles sont proportionnelles.

PREMIÈREMENT. Si $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$, le rectangle des extrêmes AB & AD , est égal à celui des moyennes EF & EH . Fig. 22.

Const. Faites le rectangle AC , dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD , l'autre. Faites aussi le rectangle EG , dont la ligne EF soit l'un des côtés, & la ligne EH , l'autre.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles $[C]$: & leurs côtés sont réciproquement proportionnels, puisque $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$ $[H]$. Donc, ces parallélogrammes sont égaux (n) .

N. 428.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

S

Fig. 22. SECONDEMENT. Si les quatre lignes droites AB^* , EF , EH & AD , sont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD , soit égal à celui des moyennes EF & EH ; elles donnent cette proportion, $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles $[e]$: & leurs surfaces sont égales $[H]$. Donc, leurs côtés sont réciproquement proportionnels (n) . Par conséquent, $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE I.

431. Il suit de la seconde partie de ce théorème, que dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, leurs parties sont réciproquement proportionnelles.

Dans les cercles X (Liv. 3, Fig. 51, 52, 53 & 54.) les parties des cordes AB & CD qui s'entrecoupent au point F , donnent cette proportion, $AF \cdot CF :: FD \cdot FB$.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB , est égal à celui des parties CF & FD (n) . Donc, $AF \cdot CF :: FD \cdot FB$ (n) ,
N. 268. Par conséquent, C. Q. F. D.
N. 430.

COROLLAIRE II.

432. Il suit encore de la même seconde partie, que si d'un même point pris hors d'un cercle, on tire deux sécantes, ces deux sécantes & leurs parties extérieures, sont réciproquement proportionnelles.

Au cercle X (Liv. 3, Fig. 57.) les sécantes AC & AB, avec leurs parties extérieures AF & AE, donnent cette proportion $AB . AC :: AF . AE$.

Démonst. Le rectangle de la sécante AB & de la partie AE, est égal à celui de la sécante AC & de la partie AF (n). N. 271.
Donc, $AB . AC :: AF . AE$ (n). N. 430.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

433. Si trois lignes droites sont en proportion continue, le rectangle des extrêmes est égal au carré de la moyenne : & si trois lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal au carré de la moyenne, elles sont en proportion continue.

Fig. 23. PREMIÈREMENT. Si $\therefore AB \cdot EF \cdot AD$, le rectangle des extrêmes AB & AD , est égal au carré de la moyenne EF .

N. 170. *Const.* Faites le rectangle AC , dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD , l'autre. Décrivez ensuite (n) le carré EG , sur la ligne EF .

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles $[C]$: & leurs côtés sont réciproquement proportionnels ; puisque, $AB \cdot EF :: EF \cdot AD$ $[H]$, & que EH est
N. 50. égal à EF (n) . Donc, ces parallélogrammes
N. 428. sont égaux (n) .

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT, Si les trois lignes

droites AB^* , EF & AD , sont telles Fig. 23.
 que le rectangle des extrêmes AB & AD ,
 soit égal au quarré de la moyenne EF ;
 elles donnent cette proportion, $AB . EF ::$
 $EF . AD$.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les parallélogrammes AC
 & EG sont équiangles, puisqu'ils sont
 rectangles [C]: & leurs surfaces sont éga-
 les [H]. Donc, leurs côtés sont récipro-
 quement proportionnels (n); & par con- N. 428.
 séquent, $AB . EF :: EH . AD$. Or, EF
 est égal à EH (n). Donc, $AB . EF :: EF .$ N. 59.
 AD (n). N. 61.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE.

434. Il suit de la seconde partie de ce
 theorème, que *si d'un même point pris*
hors d'un cercle, on tire une tangente &
une sécante, cette tangente est moyenne
proportionnelle entre cette sécante & sa par-
tie extérieure.

Au cercle X (*Liv. 3, Fig. 55 & 56*)
 la sécante AC , sa partie extérieure AD ,
 & la tangente AB , donnent cette propor-
 tion, $AC . AB :: AB . AD$.

Démonst. Le rectangle de la sécante
 AC & de sa partie AD , est égal au quarré

N. 270. de la tangente AB (n). Donc, $AC . AB ::$

N. 433. $AB . AD$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÈME.

435. *Décrire sur une ligne droite donnée, une figure qui soit semblable à une figure rectiligne aussi donnée.*

Fig. 14. **I**L faut décrire sur la ligne droite EF * une figure qui soit semblable à une figure rectiligne DB .

Const. Divisez en triangles ACB & ADC , la figure proposée DB . Décrivez
 N. 119. ensuite sur la ligne EF (n), un angle GEF qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAB ; & un angle F qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle B . Décrivez aussi sur la ligne EG
 N. 119. (n), un angle GEH qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAD ; & un angle EGH qui ait le point G pour sommet, & soit égal à l'angle ACD . La figure rectiligne HF , que les côtés de ces angles forment sur la ligne EF , est la figure demandée.

Démonst. Premièrement, les angles GEF & GEH, CAB & CAD sont égaux chacun à chacun [c]. Ainsi, l'angle HEF est égal à l'angle DAB.

L'angle F est égal à l'angle B [c].

Les angles EGF & ACB sont égaux (n); N. 137.
& les angles EGH & ACD le sont aussi [c]. Ainsi, les angles FGH & BCD sont égaux.

Enfin, l'angle H est égal à l'angle D (n). N. 17.

Secondement. Les triangles EGF & ACB sont équiangles [c]. Ainsi, EF . AB :: FG . BC (n).

Les triangles EHG & ADC sont aussi équiangles [c]. Ainsi, EH . AD :: HG . DC (n).

Enfin, les triangles EGF & ACB sont équiangles [c]; & les triangles EHG & ADC le sont aussi [c]. Donc, EF . AB :: EG . AC :: EH . AD (n). Par N. 413.
conséquent, EF . AB :: EH . AD (n). N. 350.

Ainsi, dans les figures rectilignes HF & DB, les angles sont égaux aux angles, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels. Donc, ces figures sont semblables (n). N. 400.

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

436. Si la figure proposée avoit un plus

grand nombre de côtés , on la diviseroit en un plus grand nombre de triangles , que l'on rapporteroit l'un après l'autre sur les côtés des triangles de la figure HF ; de la même manière dont on vient de rapporter le triangle ADC sur le côté EG.

U S A G E.

437. *On se sert de cette proposition , pour lever le plan d'un bâtiment , d'une ville , d'un champ , d'une forêt , &c. & même celui d'un pays ; car , lever un plan , c'est décrire sur une ligne droite donnée , une figure qui soit semblable à celle de la chose dont on veut lever le plan.*



PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

438. *Les triangles semblables sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils.*

LES triangles semblables ABC^* & DEF Fig. 25. sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils ; par exemple, de celui du côté AC au côté DF .

Const. Cherchez (n) une troisieme proportionnelle aux côtés AC & DF . Prenez sur le côté AC , une partie AG égale à cette troisieme proportionnelle. Tirez ensuite du point B au point G , la ligne droite BG . N. 424.

Démonst. Les triangles ABC & DEF sont semblables [H]. Ainsi, $AB : DE :: AC : DF$ (n). Or, $AC : DF :: DF : AG$ N. 413. [C]. Donc, $AB : DE :: DF : AG$ (n). Par N. 350. conséquent, puisque l'angle A est égal à l'angle D [H], les triangles ABG & DEF sont égaux (n). N. 429.

Mais, le triangle ABC est au triangle ABG , ce que le côté AC est au côté AG (n). Donc, le même triangle ABC est N. 406. aussi au triangle DEF , ce que le côté AC

N. 354. est au côté AG (n). Ainsi, puisque le rapport qui est entre ces deux côtés, est doublé de celui du côté AC au côté DF (n),
 N. 348. le rapport du triangle ABC au triangle DEF, est aussi doublé du même rapport.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

439. *Les polygones semblables peuvent être divisés chacun en un pareil nombre de triangles semblables, chacun à chacun : ils sont proportionnels à ceux de ces triangles qui se correspondent : enfin, ils sont entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils.*

PREMIÈREMENT. Les polygones
 Fig. 26. semblables EB * & KG peuvent être divisés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles semblables, chacun à chacun.

Const. Du sommet de l'un quelconque A des angles du polygone EB, tirez aux points C & D, les lignes droites AC & AD. Du point F, qui correspond au point

A, tirez aux points H & I, les lignes droites FH & FI.

Démonst. Puisque les polygones EB & KG sont semblables [H], il y a dans le premier autant d'angles opposés à l'angle A, qu'il y en a dans le second d'opposés à l'angle F. Or [C], on a divisé le premier polygone, par des lignes droites tirées de l'angle A à chaque angle opposé à l'angle A; & le second, par des lignes droites tirées de l'angle F à chaque angle opposé à l'angle F. Donc, on a divisé chacun de ces polygones, par un pareil nombre de lignes droites. Par conséquent, on les a divisés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles.

Or, ces triangles sont semblables (n). N. 400.
Car premièrement, les triangles ABC & FGH le sont (n); puisque les angles B & N. 7
G sont égaux, & que $AB : FG :: BC : GH$ (n).
Secondement, les triangles AED N. 400.
& FKI le sont (n); puisque les angles E N. 417.
& K sont égaux, & que $AE : FK :: ED : KI$ (n).
Troisièmement, enfin, les triangles N. 400.
ACD & FHI le sont aussi (n). Car, les N. 416.
triangles semblables ABC & FGH donnent cette proportion, $AC : FH :: BC : GH$ (n).
Or, $BC : GH :: CD : HI$ (n). N. 413.
Donc, $AC : FH :: CD : HI$ (n). N. 400.
Et en N. 350.
comparant entr'eux les triangles semblables

EAD & KFI, on démontre par un pareil raisonnement, que $AD : FI :: CD : HI$.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 26. SECONDEMENT. Si les polygones semblables EB^* & KG , sont pareillement divisés chacun en un égal nombre de triangles, par exemple, AED , ACD & ABC , FKI , FHI & FGH ; le polygone EB est au polygone KG , ce que l'un quelconque des triangles du premier, par exemple le triangle AED , est au triangle correspondant FKI .

Démonst. Le rapport du triangle AED au triangle FKI , est doublé de celui du
 N. 438. côté ED au côté KI (n) : le rapport du triangle ACD au triangle FHI , est aussi doublé du même rapport; puisqu'il est doublé du rapport du côté CD au côté
 N. 438. HI (n), qui est le même que celui de ED
 N. 400. à KI (n): enfin, le rapport du triangle ABC au triangle FGH , est encore doublé du même rapport; puisqu'il est doublé du
 N. 438. rapport du côté AB au côté FG (n), qui est aussi le même que celui de ED à KI
 N. 400. (n). Donc, le triangle AED est au triangle FKI , ce que le triangle ACD est au triangle FHI , ce que le triangle ABC est
 N. 350. au triangle FGH (n). Par conséquent, le

polygone EB, (qui est la somme des triangles antécédens AED, ACD & ABC), est au polygone KG, (qui est celle des triangles conséquens FKI, FHI & FGH), ce que le triangle antécédent AED, est à son triangle conséquent FKI (n).

N. 379.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

TROISIÈMEMENT. Enfin, les polygones semblables EB* & KG sont entr'eux Fig. 26. en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté ED au côté KI.

Démonst. Le rapport du polygone EB au polygone KG, est le même que celui du triangle AED au triangle FKI [D]. Or, le rapport qui est entre ces deux triangles, est doublé de celui du côté ED au côté KI (n). Donc, le rapport qui N. 438. est entre ces deux polygones, en est aussi doublé.

Par conséquent, C. Q. F. 3^o D.

COROLLAIRE.

440. Il suit de la dernière partie de ce théorème, que *si trois lignes droites sont en proportion continue, un polygone quelconque décrit sur la première, est à un polygone semblable & semblablement posé*

sur la seconde, ce que cette premiere ligne est à la troisieme.

Fig. 27. Si les trois lignes droites A^* , B & C sont en proportion continue, un polygone quelconque décrit sur la ligne A , est à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B , ce que la ligne A est à la ligne C .

Démonst. Le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A , à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B , est doublé du rapport qui est entre ces deux lignes (n). Or, le rapport de la ligne A à la ligne C , est aussi doublé de ce même rapport (n). Donc, le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A , à un polygone semblable & semblablement posé sur la ligne B , est le même que celui de la ligne A à la ligne C (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

441. *On se sert de ce corollaire, pour résoudre les deux problèmes suivans.*

Fig. 26. PREMIER. Connoître le rapport d'un polygone quelconque EB^* , à un polygone semblable KG .

N. 424. Solution. Cherchez (n) une troisieme proportionnelle à deux quelconques des côtés

pareils de ces polygones ; par exemple , aux côtés ED & KI . Le polygone EB est au N. 440. polygone KG (n), ce que le côté ED sera à cette troisieme proportionnelle.

SECOND. Décrire un polygone , qui soit semblable au polygone EB * ; & qui Fig. 26. en soit , par exemple , les deux tiers.

Solution. Cherchez (n) une moyenne N. 426. proportionnelle KI entre l'un quelconque des côtés du polygone EB , & les deux tiers de ce côté ; par exemple , entre le côté ED & ses deux tiers. Décrivez ensuite sur cette moyenne (n) , un polygone KG , N. 435. semblable au polygone proposé EB . Ce polygone sera les deux tiers du polygone EB . Car , puisque les trois lignes ED , KI & les deux tiers de ED , sont en proportion continue [C] , le polygone EB , décrit sur la premiere , est au polygone semblable KG , décrit sur la seconde , ce que la premiere est à la troisieme (n). Or , cette troisieme est les N. 440. deux tiers de cette premiere [C].

Donc , C. Q. F. F.



PROPOSITION XXI.

* THÉORÈME.

442. *Les circonférences des polygones semblables, sont proportionnelles aux lignes droites semblablement tirées dans ces polygones.*

Fig. 26. **D**ANS les polygones semblables ACE* & FHK, la circonférence ABCDEA du premier, est à la circonférence FGHKIF du second, ce que les lignes droites semblablement tirées dans ces polygones, par exemple les lignes AC & FH, sont entr'elles.

Démonst. Puisque les polygones ACE & FHK sont semblables [H], leurs côtés AB, FG, BC, GH, CD, HI, DE, IK, EA & KF sont proportionnels (n).
 N. 400. Ainsi, la somme ABCDEA des antécédents AB, BC, &c, c'est-à-dire la circonférence du premier polygone, est à la somme FGHKIF des conséquents FG, GH, &c. c'est-à-dire à la circonférence du second polygone, ce que l'antécédent
 N. 379. AB est à son conséquent FG (n).
 N. 413. Mais, AB . FG :: AC . FH (n); puis-

que les triangles ABC & FGH sont semblables (n). Donc, la circonférence N. 439. ABCDEA est à la circonférence FGHIKF, ce que la ligne AC est à la ligne FH (n). N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

443. Il suit de ce théorème & du n° 408, que les circonférences des cercles sont proportionnelles aux diamètres de ces mêmes cercles.

SCHOLIE.

444. Comme on ne peut mesurer immédiatement aucune ligne courbe (n), les Géo- N. 148. metres ont fait les plus grands efforts pour connoître le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre. Mais, jusqu'à présent, toutes leurs tentatives ont été sans succès. Ainsi, dans le peu d'espérance d'y pouvoir jamais parvenir, ils se sont réduits à chercher les moyens d'en approcher le plus près qu'il seroit possible.

Or, de tous ceux qui ont tenté ce grand œuvre géométrique, Archimede est celui qui a pris la route la plus simple. Il est vrai qu'elle ne conduira jamais à déterminer rigoureusement le juste rapport du diamètre du cercle à sa circonférence. Mais, comme on

n'a encore rien trouvé de mieux , nous allons enseigner la maniere dont il s'y prit.

Il considéra , que la circonférence d'un cercle est toujours plus grande que celle de tout polygone qui lui est inscrit ; & plus petite au contraire , que celle de tout polygone qui lui est circonscrit.

En partant de ce principe , il prit le diametre d'un cercle quelconque pour l'unité , & calcula de combien devoit être , dans cette supposition , le côté du polygone régulier de 96 côtés , inscrit dans ce cercle ; & celui du polygone semblable , circonscrit au même cercle. Il multiplia ensuite ses résultats , chacun par 96 ; ce qui lui donna $3\frac{10}{71}$, & un peu plus , pour la circonférence du premier polygone ; & $3\frac{1}{7}$, & un peu moins , pour celle du second. D'où il tira cette conclusion , que la circonférence du cercle est un peu plus grande que le produit de son diametre multiplié par $3\frac{10}{71}$; & un peu plus petite au contraire , que le produit du même diametre multiplié par $3\frac{1}{7}$.

Or , ces deux produits ne different l'un de l'autre que de $\frac{1}{497}$. Donc , si pour avoir la circonférence d'un cercle , on multiplie par $3\frac{1}{7}$ la valeur de son diametre , on est sûr que sur un cercle qui auroit 497 pieds de diametre , on ne fait pas une erreur d'un pied de trop. Et comme cette approximation est

suffisante pour la pratique , on prend ordinairement le rapport de 7 à 22 pour celui du diametre d'un cercle à sa circonférence.

Si l'on en vouloit cependant un qui fût encore plus exact , on se serviroit de celui de 113 à 355. On ne feroit pas alors une erreur d'un pied de trop , sur la circonférence d'un cercle dont le diametre seroit de 1000000 de pieds.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

445. Si quatre lignes droites sont proportionnelles , les polygones semblables & semblablement posés sur les deux premières , sont proportionnels aux polygones semblables & semblablement posés sur les deux dernières : & si deux polygones semblables sont proportionnels à deux autres polygones aussi semblables , les côtés des premiers sont proportionnels aux côtés pareils des derniers.

PREMIÈREMENT. Si $AB^* . CD :: EF . GH$, les polygones AIB & CKD , qui sont semblables & semblablement posés sur les deux premières , sont proportionnels aux polygones EM & GO , qui sont aussi

Fig 29.

semblables & semblablement posés sur les deux dernières.

Démonst. Puisque [H] les polygones AIB & CKD sont semblables, le rapport du premier au second est doublé du rapport du côté AB au côté CD (n) : & par une raison pareille, le rapport du polygone EM au polygone GO, est doublé du rapport du côté EF au côté GH. Or, le rapport du côté AB au côté CD, est le même que celui du côté EF au côté GH [H]. Donc, le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est aussi le même que celui du polygone EM au polygone GO (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 29. SECONDEMENT. Si les polygones semblables AIB * & CKD, sont proportionnels aux polygones EM & GO, qui sont aussi semblables; les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, sont proportionnels aux côtés pareils EF & GH des deux derniers.

Démonst. Si les quatre lignes droites AB, CD, EF & GH n'étoient point proportionnelles; une quatrième proportionnelle aux trois premières, seroit ou plus grande, ou plus petite, que la ligne GH.

Or, si l'on décriroit sur cette quatrième

(n), un polygone qui fût semblable au N. 435^e polygone GO, & semblablement posé; il seroit aussi plus grand, ou plus petit, que le polygone GO. Par conséquent, il ne seroit point proportionnel aux polygones AIB, CKD & EM.

Mais [D], lorsque quatre lignes droites sont proportionnelles, les polygones semblables, qui sont semblablement posés sur elles, sont aussi proportionnels. Donc, puisque les polygones semblables AIB, CKD, &c. qui seroient semblablement posés sur les trois lignes AB, CD, EF, & sur une quatrième plus grande ou plus petite que GH, ne seroient point proportionnels, ces trois lignes, & une quatrième plus grande, ou plus petite que GH, ne sont point proportionnelles. Par conséquent, les lignes AB, CD, EF & GH, le sont.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE.

446. Il suit de la première partie de ce théorème, que *si trois lignes droites sont en proportion continue, les polygones semblables, & semblablement posés sur ces trois lignes, sont aussi en proportion continue*: & de la seconde partie, que *si trois*

polygones semblables sont en proportion continue, leurs côtés pareils le sont aussi.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

447. *Les parallélogrammes équiangles sont entr'eux en rapport composé de ceux de leurs côtés.*

Fig. 30. **L**ES parallélogrammes équiangles AC * & BF, sont entr'eux en rapport composé de celui du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au côté BG; c'est-à-dire (n), ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG.

Const. Disposez les parallélogrammes AC & BF, de manière que les côtés BE & BG, deviennent les prolongemens des côtés AB & CB. Décrivez ensuite sur le côté AB, le rectangle AI, dont le côté BI soit égal au côté BC; & sur le côté BE, le rectangle BL, dont le côté BM soit égal au côté BG. Enfin, prolongez les côtés DC & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H; & les côtés KI & LE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point N.

Démonst. Le parallélogramme AC est au parallélogramme BH, ce que le rectangle AI est au rectangle BN (n); puisque ces pa- N. 350.
rallélogrammes, de même que ces rectan-
gles sont entr'eux, ce que AB est à BE (n). N. 405.

Or, par une pareille raison, le parallélogramme BH est au parallélogramme BF, ce que le rectangle BN est au rectangle BL. Donc (n), le parallélogramme AC est au N. 388.
parallélogramme BF, ce que le rectangle AI est au rectangle BL. Mais (n), le rec- N. 149.
tangle AI est le produit de AB multiplié par BI, qui est égal à BC [C]: & le rectangle BL est le produit de BE multiplié par BM, qui est égal à BG [C]. Donc, le parallélogramme AC est au parallélogramme BF, ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

448. Il suit de ce théorème, que les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont entr'eux en rapport composé de ceux des côtés qui forment ces angles égaux †.

† Des Auteurs modernes ont écrit que cette proposition ne se trouve dans aucun Livre d'Elémens; & qu'elle est de *Scooten*, commentateur de la Géométrie de *Des cartes*. Ces Auteurs n'avoient point lu *Euclide*.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

449. *Les parallélogrammes qui ont un angle de commun, & leurs diagonales sur une même ligne droite, sont semblables.*

Fig. 31. **L**ES parallélogrammes GE^* & DB , qui ont l'angle A de commun, & dont les diagonales AF & AC sont sur la même ligne droite AC , sont semblables.

Démonst. Puisque les parallélogrammes GE & DB ont un angle de commun $[H]$,
 N. 146. ils sont équiangles (n). Donc, l'angle AEF est égal à l'angle B ; & par conséquent, les triangles AFE & ACB qui ont l'angle
 N. 137. CAB de commun, sont semblables (n).

Or, puisque ces triangles sont sembla-
 N. 413. bles, $AE . AB :: EF . BC$ (n).

Ainsi, les parallélogrammes GE & DB sont équiangles; & les côtés qui y forment les angles égaux, sont proportionnels. Donc, ces parallélogrammes sont sembla-
 N. 400. bles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXV.

PROBLÈME.

450. *Décrire un polygone, qui soit semblable à un autre polygone donné, & égal à un troisieme aussi donné.*

IL faut décrire un polygone, qui soit semblable au polygone BCD *, & égal Fig. 32. au polygone A.

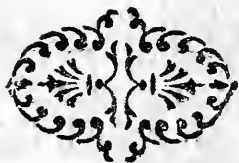
Const. Décrivez (n) sur l'un des côtés N. 167. du polygone BCD, par exemple sur le côté BD, un rectangle BE, qui soit égal à ce polygone; & sur l'un des côtés de ce rectangle, par exemple sur le côté DE, un rectangle DH, qui soit égal au polygone A. Cherchez ensuite (n), une N. 426. moyenne proportionnelle DI, entre les côtés BD & DG. Enfin (n), décrivez sur N. 435. cette moyenne, un polygone DKI, qui soit semblable au polygone BCD. Il sera le polygone demandé.

Démonst. Les lignes BD, DI & DG sont en proportion continue [C]. Ainsi, puisque les polygones BCD & DKI sont semblables [C], le premier est au second, ce que BD est à DG (n). Or, le rectan- N. 440.

gle BE est aussi au rectangle DH, ce que
 N. 405. BD est à DG (n). Donc, le polygone
 BCD est au polygone DKI, ce que le
 N. 350. rectangle BE est au rectangle DH (n).
 Ainsi, puisque le premier polygone & le
 premier rectangle sont égaux [C], le der-
 nier polygone & le dernier rectangle le
 N. 369. sont aussi (n).

Mais, ce dernier rectangle est égal au
 polygone A [C]. Donc, le dernier poly-
 N. 62. gone est aussi égal au polygone A (n).
 D'ailleurs, ce même dernier polygone est
 semblable au polygone BCD [c].

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI.

* THÉORÈME.

451. *Chaque côté adjacent à l'angle droit d'un triangle rectangle, est moyen proportionnel entre la somme & la différence des deux autres côtés.*

LE côté, par exemple BC^* , du triangle *Fig. 36.* ABC qui est rectangle en C , est moyen proportionnel entre la somme $BA+AC$, & la différence $BA-AC$ des deux autres côtés.

Const. Du point A pris pour centre, & avec le côté AC pris pour rayon, décrivez le cercle X . Prolongez ensuite le côté BA , jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence à un point D .

Démonst. Des deux lignes droites BAD & BC , qui sont tirées du même point B hors du cercle X à la circonférence du même cercle, la première le coupe, & la seconde le touche (n). Ainsi $BAD \cdot BC$ *N. 242.*
 $:: BC \cdot BE$ (n). Or, BAD est la somme des *N. 434.*
 côtés BA & AC ; & BE en est la différence [c].

Donc, $C. Q. F. D.$

PROPOSITION XXVII.

* THÉORÈME.

452. Si du plus grand angle d'un triangle scalène, on abaisse une perpendiculaire au côté opposé, la base & la différence des segmens de la base, sont moyennes proportionnelles entre la somme & la différence des deux autres côtés.

Fig. 37. **L**A somme $AB + BC$ des côtés AB & BC du triangle scalène ABC , est à la base AC , ce que la différence $AD - DC$ des segmens AD & DC de cette base, est à la différence $AB - BC$ de ces côtés.

Const. Du point B pris pour centre, & avec le plus petit côté BC pris pour rayon, décrivez le cercle X . Prolongez ensuite le côté AB , jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence à un point E .

Démonst. Les lignes ABE & AC sont deux sécantes tirées du même point A hors du cercle X à la circonférence du même cercle $[C]$. Ainsi, $ABE : AC :: AG : AF$ (n). Or, ABE est la somme des côtés AB & BC ; AF en est la différence; & AG est celle des segmens AD & DC .
 Done, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVIII.

** THÉORÈME.

453. Si une ligne droite qui est perpendiculaire au diamètre d'un cercle, rencontre une corde tirée de l'une quelconque des extrémités de ce diamètre; ce même diamètre, cette corde, & les parties de l'une & de l'autre qui ont un point de commun, sont réciproquement proportionnels.

LA ligne droite DE* qui est perpendi- Fig. 38.
culaire au diamètre AB du cercle X, & rencontre au point E la corde AC, qui a le point A de commun avec ce diamètre, donne cette proportion, $AB . AC :: AE . AD$.

Const. Tirez du point B au point C, la ligne droite BC.

Démonst. Les triangles ACB & ADE qui sont rectangles l'un en C (n), & l'autre en D [H], ont l'angle A de commun. N. 263.
Ainsi, ils sont semblables; & par conséquent, $AB . AC :: AE . AD$ (n). N. 413.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point que la perpendiculaire DE rencontre la corde AC.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

454. Il suit de ce théorème, que si plusieurs cordes qui sont tirées chacune de l'une quelconque des extrémités d'un même diamètre, sont coupées par une perpendiculaire à ce diamètre; tous les rectangles faits chacun de chacune de ces cordes, & de la partie de cette corde qui a un point de commun avec ce même diamètre, sont égaux entr'eux.

Fig. 39. Le rectangle de la corde AC* & de sa partie AE, est égal à celui de la corde AG & de sa partie AF.

Démonst. Puisque, $AB \cdot AC :: AE \cdot$

N. 453. $AD (n)$, le rectangle des lignes AB & AD

N. 430. est égal à celui des lignes AC & AE (n).

Or, par une raison pareille, ce même premier rectangle est aussi égal à celui des lignes AG & AF. Donc, le rectangle des lignes AC & AE est égal à celui des lignes

N. 62. AG & AF (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

455. Il suit de ce corollaire, & du théorème précédent, que si une perpendiculaire au diamètre d'un cercle est au milieu de ce diamètre, le côté du quarré inscrit

dans ce cercle, est moyen proportionnel entre l'une quelconque des cordes qui ont un point de commun avec ce diamètre, & la partie de cette corde comprise entre ce point commun & cette perpendiculaire.

Dans le cercle X * où la perpendiculaire *de* au diamètre AB est au milieu de ce diamètre, le côté du quarré qui y seroit inscrit, est moyen proportionnel entre la corde, par exemple AC, & sa partie Ae. Fig. 39.

Const. Prolongez la perpendiculaire *de* jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence à un point H. Tirez ensuite du point A au point H, la ligne droite AH.

Démonst. Le rectangle de la corde AC & de sa partie Ae, est égal à celui du diamètre AB & du rayon Ad (n). Or, N. 454.
ce dernier rectangle est double du quarré du rayon Ad (n). N. 405.

Mais, le quarré de la ligne AH, laquelle est le côté du quarré qui seroit inscrit dans le cercle X (n), est aussi double N. 290.
du quarré du même rayon Ad (n). Donc, N. 171.
le rectangle de la corde AC & de la partie Ae, est égal au quarré du côté AH (n). N. 67.
Par conséquent, AC . AH :: AH . Ae (n). N. 433.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

** THÉORÈME.

456. *Si après avoir décrit un demi-cercle sur l'une quelconque de deux cordes qui s'entrecoupent dans un cercle, on élève du point d'intersection une ordonnée au diamètre de ce demi-cercle, cette ordonnée est moyenne proportionnelle entre les deux parties de chacune de ces cordes.*

Fig. 40. L'ORDONNÉE EF* au diamètre CD du demi-cercle CFD, est moyenne proportionnelle entre les parties AE & EB de la corde AB du cercle ABD.

Démonst. Puisque les cordes AB & CD s'entrecoupent au point E, le rectangle des parties AE & EB de la première, est égal à celui des parties CE & ED de la seconde (n). Or, le rectangle de ces parties CE & ED, est égal au carré de l'ordonnée EF (n). Donc, le rectangle des parties AE & EB, est égal au carré de l'ordonnée EF (n). Par conséquent, AE . EF :: EF . EB (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

457. Il suit de ce théorème, que si les cordes dont il s'agit, s'entrecoupent perpendiculairement, alors la partie EF^* Fig. 41. de la corde AB , est moyenne proportionnelle entre ses deux autres parties AE & EB .

PROPOSITION XXX.

PROBLÈME.

458. Diviser en moyenne & extrême raison une ligne droite donnée.

IL faut diviser la ligne droite AB^* , en Fig. 33. moyenne & extrême raison.

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux N. 203. parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite partie CB , soit égal au carré de la plus grande AC . Elle sera divisée comme il est demandé.

Démonst. Le rectangle des lignes AB & CB est égal au carré de la ligne AC [c]. Ainsi, $\therefore AB \cdot AC \cdot CB (n)$. N. 433.

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

459. Si des polygones qui sont décrits sur les côtés d'un triangle rectangle sont semblables, & semblablement posés sur ces côtés; celui qui est sur l'hypothénuse est égal à la somme des deux autres.

Fig. 34. Si les polygones X^* , Y & Z , qui sont décrits sur les côtés du triangle rectangle ABC , sont semblables, & semblablement posés sur ces côtés; le polygone X , qui est sur l'hypothénuse AC , est égal à la somme des polygones Y & Z qui sont sur les autres côtés.

Const. Du point B , abaissez la perpendiculaire BD à l'hypothénuse AC (n).

Démonst. Les triangles ABC & ADB (n. 420.) sont semblables (n). Donc, $\therefore AC : AB = AD : BD$ (n). Ainsi, puisque les polygones X & Y sont aussi semblables [H], le polygone X est au polygone Y , ce que AC est à AD (n). Par conséquent, en renversant, le polygone Y est au polygone X , ce que AD est à AC (n).

Pareillement, les triangles ABC &

& CDB sont semblables (n). Donc, \therefore N. 420.
 AC . BC . DC (n). Ainsi , puisque les N. 413.
 polygones X & Z sont aussi semblables
 [H], le polygone X est au polygone Z ,
 ce que AC est à DC (n). Par conséquent, N. 440.
 en renversant , le polygone Z est au poly-
 gone X, ce que DC est à AC (n). N. 372.

Ainsi , les six quantités Y, X, AD ,
 AC , Z & DC , sont telles que les quatre
 premieres sont proportionnelles ; & que la
 cinquieme , la seconde , la sixieme & la
 quatrieme , le sont aussi. Donc , la somme
 Y+Z de la premiere & de la cinquieme ,
 est à la seconde X , ce que la somme AD
 + DC de la troisieme & de la sixieme ,
 est à la quatrieme AC (n). Par conséquent, N. 390.
 puisque cette derniere somme AD+DC ,
 est égale à AC , la premiere Y + Z est
 égale à X (n). N. 369.

Donc , C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

460. *Dans les cercles égaux , les secteurs sont entr'eux , comme les arcs qui les terminent.*

Fig. 35. **D**ANS les cercles égaux B^* & E , le secteur ABC est au secteur DEF , ce que l'arc AHC est à l'arc DMF .

N. 262. *Const.* Divisez (n) le plus petit AC des deux arcs AC & DF , en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira ; par exemple, en quatre parties égales AG , GH , &c. Prenez sur l'arc DF , une partie DK égale à la partie AG . Enfin, tirez du centre B aux points G , H , &c. les rayons BG , BH , &c ; & du centre E au point K , le rayon EK .

Démonst. Les secteurs ABG , GBH ,
N. 37. HBI , IBC & DEK , sont égaux (n) .
Ainsi, l'on démontre que le secteur ABC est au secteur DEF , ce que l'arc AHC est à l'arc DMF , par un raisonnement tout pareil à celui dont on s'est servi au n^o 405, pour démontrer que les parallélo-

grammes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

461. Il suit de ce théorème, que le secteur est au cercle, ce que l'arc du secteur est à la circonférence du cercle.

PROPOSITION XXXIII.

** THÉORÈME.

462. Si de deux points pris à volonté sur l'arc qui termine un quart de cercle, mais cependant également éloignés chacun du milieu de cet arc, on abaisse des perpendiculaires au rayon; le quadrilatere compris entre ces perpendiculaires est au cercle, ce que l'arc qui termine ce quadrilatere est à la circonférence du cercle.

LE quadrilatere ABCD* compris entre Fig. 42.
les lignes droites AD & BC qui sont perpendiculaires chacune au rayon EK, & rencontrent l'arc AIB aux points A & B également éloignés chacun de son milieu I, est au cercle, ce que ce même arc AIB est à la circonférence du cercle.

Const. Tirez du centre E aux points A & B, les rayons EA & EB.

Démonst. L'arc BK est égal à l'arc LA [H]. Ainsi, l'angle BEK est égal à
 N. 37. l'angle LEA (n). Or, l'angle LEA est
 N. 130. égal à l'angle EAD (n); puisque les lignes
 N. 129. LE & AD sont parallèles (n). Donc, les
 N. 62. angles BEK & EAD sont égaux (n).

Ainsi, dans les triangles ECB & ADE qui sont rectangles l'un en C, & l'autre en D [C], les angles BEK & EAD sont égaux, de même que les côtés EB & EA
 N. 35. (n). Donc, ces triangles sont égaux (n).
 N. 123. Par conséquent, si du même quadrilatère ABCE on retranche le premier de ces deux triangles, ou si l'on en retranche le dernier, les restes seront égaux.

Or, ces restes sont, dans le premier cas, le secteur AEB; & dans le second, le quadrilatère ABCD. Donc, ce secteur & ce
 N. 64. quadrilatère sont égaux (n).

Mais, ce secteur est au cercle, ce que l'arc AIB est à la circonférence du cercle
 N. 461. (n). Donc, le quadrilatère ABCD est aussi au cercle, ce que ce même arc AIB est à la même circonférence.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

463. Il suit de ce théorème, que si l'on prolonge jusqu'à la circonférence les perpendiculaires AD^* & BC , la bande $ABFG$ est au cercle, ce que l'arc AIB est à la demi-circonférence. Fig. 42.

COROLLAIRE II.

464. Il suit aussi de ce même théorème, que les bandes telles que $ABCD^*$, $EFGH$, &c. sont entr'elles, comme les arcs AIB , EIF , &c. qui les terminent de l'un de leurs côtés. Fig. 43.

COROLLAIRE III.

465. Enfin, il suit de ce corollaire, que si après avoir divisé en un même nombre de parties égales chacun des arcs égaux IE^* & IF , on tire par chaque point de division des parallèles à la corde IK , les bandes, telles que ED , AK , IC & BG qui en résultent, sont en proportion arithmétique. Fig. 43.

Démonst. Si chacun des arcs IE & IF est divisé, par exemple en deux parties égales, la bande EG est double de la bande AC (n). Ainsi, la somme des bandes ED & BG est égale à celle des bandes N. 464.

AK & IC. Par conséquent, ces quatre bandes sont en proportion arithmétique.

Et si les arcs IE & IF sont divisés chacun en un plus grand nombre de parties égales, on démontre, par un raisonnement semblable au précédent, que toutes les bandes qui résultent de cette division, prises deux à deux, l'une au-dessous & l'autre au-dessus de la corde IK, & également éloignées chacune de cette corde, forment entr'elles des sommes égales. Donc, ces bandes sont toujours en proportion arithmétique.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

On peut se servir de cette proposition, de la manière suivante, pour résoudre ce problème.

Fig. 44. Couper d'un cercle X* une bande, qui en soit, par exemple, la cinquième partie.

SOLUTION. Tirez un diamètre AB, à N. 261. volonté. Divisez (n) en deux parties égales AI & IC le quart AC de la circonférence. Prenez de part & d'autre du point I les arcs ID & IE; chacun de 18 degrés, parce que 36 est la dixième partie de 360. Enfin, N. 133. des points D & E, tirez (n) les parallèles DG & EF au diamètre AB. Le quadrilatère

DF que ces paralleles forment avec les arcs DE & FG, est (n) la bande demandée. N. 463.

PROPOSITION XXXIV.

* THÉORÈME.

466. *Le rectangle des diagonales d'un quadrilatere quelconque inscrit dans un cercle, est égal à la somme des deux rectangles faits chacun des côtés opposés de ce même quadrilatere.*

LE rectangle des diagonales AC* & BD Fig. 45. du quadrilatere ABCD inscrit dans le cercle X, est égal à la somme des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC.

Const. Faites (n) sur le côté AB, l'angle N. 119. ABE égal à l'angle DBC.

Démonst. Dans les triangles ABE & DBC, les angles ABE & DBC sont égaux [C], & les angles BAC & BDC le sont aussi (n); puisqu'ils sont chacun dans N. 250. le même segment BADC. Ainsi, ces deux triangles sont équiangles. Donc, AB . BD :: AE . DC (n); & par conséquent, N. 413. le rectangle des lignes AB & DC est égal à celui des lignes BD & AE (n). N. 430.

- Pareillement, dans les triangles EBC & ABD, les angles EBC & ABD sont égaux; puisque la partie DBC du premier est égale à la partie ABE du second [C], & que la partie EBD leur est commune: & les angles BCA & BDA sont aussi
- N. 250. égaux (n), puisqu'ils sont chacun dans le même segment BCDA. Ainsi, ces deux triangles sont aussi équiangles. Donc, BC.
- N. 413. $BD :: EC : AD$ (n); & par conséquent, le rectangle des lignes AD & BC est égal
- N. 430. à celui des lignes BD & EC (n).

Donc, la somme des rectangles faits, l'un des lignes BD & AE, & l'autre, des lignes BD & EC, est égale à celle des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC. Mais, cette première somme est la même chose que le rectangle des diagonales AC & BD

N. 181. (n); puisque les lignes AE & EC sont toutes les parties de la diagonale AC. Donc, le rectangle des diagonales AC & BD, est égal à la somme des rectangles faits, l'un des côtés AB & DC, & l'autre, des côtés AD & BC.

Par conséquent, C. Q. F. D.





LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIEME †.

LES principes des lignes & des surfaces ont été établis dans les Livres précédens ; ainsi , il ne reste plus à parler que de ceux des solides. Mais , il est nécessaire de considérer auparavant , les différentes positions que les lignes droites & les plans peuvent avoir à l'égard d'autres plans. Cet objet seroit celui du onzieme Livre d'Euclide , si

† Nous supprimons le septieme Livre, le huitieme & le neuvieme , parce que ces trois Livres ne traitent que de certaines propriétés des nombres , qui sont assez inutiles. Nous faisons la même chose à l'égard du dixieme , parce qu'il ne considere les quantités , que pour déterminer celles qui sont *incommensurables* ; c'est-à-dire , celles qui , relativement à d'autres , ne peuvent point être exprimées par des nombres.

les personnes qui ont rassemblé les écrits de ce Géometre , n'avoient pas confondu ce Livre avec le douzieme , qui traite des solides ; de maniere que de 14 Livres d'Elémens , elles n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable , à cause du grand nombre d'Auteurs qui citent cet ouvrage. Ainsi , tout ce que nous avons pu faire , a été de ne point interrompre l'ordre des propositions : mais de diviser ce onzieme Livre en deux parties , dont la premiere comprend le onzieme d'Euclide ; & la seconde , ce qui auroit dû faire le douzieme.

Au reste , cette premiere partie est absolument nécessaire , pour la Trigonométrie sphérique , la Gnomonique , l'Astronomie , les Sections coniques , la Coupe des pierres , &c ; & la derniere , pour le Mesurage des solides.



D É F I N I T I O N S.

467. **O**N nomme *corps* ou *solide*, ce qui est étendu en trois sens.

C O R O L L A I R E.

468. *Il suit de cette définition, que les extrémités d'un corps sont des surfaces.*

Démonst. Les extrémités d'un corps ne sont point étendues en trois sens, puisque si elles l'étoient, elles seroient des corps (n). Or, si les extrémités d'un corps étoient des corps, elles auroient d'autres corps pour extrémités. Par conséquent, elles ne seroient point celles de ce premier corps; mais, ce seroient ces autres corps qui le seroient. N. 467.

Elles ne sont point non plus étendues seulement en un sens. Car, puisque les corps sont étendus en trois sens (n), il faut nécessairement que ce qui termine les corps, termine deux de ces sens. Or, ce qui n'est étendu qu'en un sens, ne peut point en terminer deux. N. 467.

Cependant, les extrémités d'un corps sont étendues. Donc, elles ne le sont qu'en

deux sens ; & par conséquent , elles sont
N. 9. des surfaces (n).

Donc , C. Q. F. D.

469. On dit d'une ligne droite , qu'elle est dans un plan , lorsque toutes ses parties sont dans ce plan , prolongé s'il est nécessaire.

Fig. 1. Les lignes droites CD^* & EF , sont dans le plan X.

470. On dit de deux lignes droites , qu'elles sont dans le même plan , lorsque l'on peut concevoir un plan , dans lequel ces deux lignes feroient en même tems.

471. On dit de deux plans , qu'ils sont dans le même plan , lorsqu'étant prolongés , ils se rencontreroient de manière qu'ils ne formeroient plus qu'un seul plan.

472. Enfin , on nomme commune section de deux plans , une ligne qui est commune à ces deux plans.

Fig. 2. La ligne AB^* , qui est en même tems dans le plan X & dans le plan Y , est la commune section de ces deux plans.

473. On dit d'une ligne droite , qu'elle est perpendiculaire à un plan , lorsqu'elle l'est à toutes les lignes de ce plan , avec

lesquelles elle peut avoir un point de commun.

La ligne AB^ est perpendiculaire au* Fig. 1.
plan X ; si elle l'est aux lignes CD , EF , &c. qui sont dans ce plan, & avec lesquelles elle a le point B de commun.

474. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *inclivée* à un plan, lorsqu'elle formeroit un angle aigu, avec une autre ligne droite qui seroit tirée du point auquel cette premiere ligne rencontre ce plan, au point auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même premiere ligne à ce même plan, le rencontreroit.

La ligne droite AB^ est inclinée au plan* Fig. 3.
 X ; parce qu'elle forme un angle aigu ABC^\dagger , avec la ligne BC qui est tirée du point B au point C , auquel la perpendiculaire AC rencontre ce plan.

475. On dit d'un plan, qu'il est *perpendiculaire* à un autre, lorsque les lignes droites qui sont tirées dans l'un de ces plans, perpendiculairement à leur commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

Le plan Y^ est perpendiculaire au plan* Fig. 2.
 X ; parce que les lignes droites CD , EF ,

\dagger L'angle aigu ABC^* s'appelle l'*inclinaison* de la ligne Fig. 3.
 AB au plan X .

456 LES ELÉMENTS D'EUCLIDE.

&c. qui sont tirées dans le plan Y perpendiculairement à la commune section AB, sont aussi perpendiculaires au plan X.

476. On dit d'un plan, qu'il est *incliné* à un autre, lorsque les lignes droites qui feroient tirées chacune dans chacun de ces plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculairement à leur commune section, formeroient des angles aigus.

Fig. 4. Le plan Y^* est incliné au plan X ; parce que les lignes droites BA & BC qui sont tirées, l'une dans le plan Y , & l'autre dans le plan X , perpendiculairement à la commune section ED , forment un angle aigu ABC †.

477. On dit que des plans sont *également*, ou *semblablement* inclinés à d'autres plans, chacun à chacun, lorsque leurs inclinaisons sont égales.

478. On dit que des plans sont *parallèles*, lorsque tous les points des uns sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

Fig. 4. † L'angle aigu ABC^* , s'appelle l'*inclinaison* du plan Y au plan X .

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

479. Il suit de cette définition, que des plans paralleles ne se rencontrent point.

480. On dit que des solides sont *semblables*, lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables chacune à chacune.

481. On dit que des solides sont *semblables & égaux*, lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables & égales, chacune à chacune.

482. Enfin, on dit que des solides sont *égaux*, lorsqu'ils contiennent des espaces égaux.

483. On nomme *angle solide*, un angle formé par plus de deux angles plans, qui ont chacun le même point pour sommet; & ne sont point dans le même plan.

L'angle A^* qui est formé par les angles Fig. 5. plans EAD , DAC , &c. qui ont chacun le même point A pour sommet, & ne sont point dans le même plan, est un angle solide.

484. On nomme *Pyramide*, un solide terminé par plus de deux plans triangulaires, qui ont chacun le même point pour

sommet ; & dont les côtés qui sont opposés à ce sommet , sont chacun dans le même plan.

Fig. 6. Le solide $ABCD^*$ qui est formé par les triangles ABD , DBC & ABC , qui ont chacun le même point B pour sommet, & dont les côtés AD , DC & AC , sont chacun dans le même plan ADC^\dagger , est une pyramide.

485. On nomme *pyramides triangulaires*, celles dont les bases sont des triangles : *pyramides quadrilateres*, celles dont les bases sont des quadrilateres : *pyramides pentagones*, celles dont les bases sont des pentagones, & ainsi de suite.

486. On nomme *Prisme*, un solide qui est terminé de deux côtés par deux plans quelconques, égaux, semblables & parallèles ; & de chaque autre côté, par un parallélogramme.

Fig. 7. Le solide X^* qui est terminé de deux côtés par les exagones CF & LI^\P , égaux, semblables & parallèles ; & de chaque autre côté, par les parallélogrammes AG , HF , IE , &c. est un prisme.

487. On nomme *prismes triangulaires*,

† Ce plan s'appelle la *base* de la pyramide.

¶ Ces deux plans s'appellent les bases du prisme.

ceux dont les bases sont des triangles : *prismes quadrilateres*, ceux dont les bases sont des quadrilateres : *prismes pentagones*, ceux dont les bases sont des pentagones ; & ainsi de suite.

488. On nomme *Sphere*, un solide qui est terminé par une seule surface, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de ce solide.

Le solide X^ est une sphere.*

Fig. 8.

489. On nomme *Centre* d'une sphere, le point qui est également éloigné de tous les points de la surface de cette sphere.

Le point C^ est le centre de la sphere X .* Fig. 8.

490. On nomme *Diametre* d'une sphere, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de cette sphere, & est terminée de part & d'autre à sa surface.

La ligne AB^ est un diametre de la sphere X .* Fig. 8.

491. On nomme *Rayon* d'une sphere, une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de cette sphere à sa surface.

La ligne CB^ est un rayon de la sphere X .* Fig. 8.

492. On nomme *Axe* d'une sphere,

un diamètre fixe de cette sphere, sur lequel elle tourne.

Fig. 8. *Le diamètre AB^* est l'axe de la sphere X , si ce diamètre étant immobile à l'égard de cette sphere, elle tourne sur lui.*

493. Lorsqu'une sphere est coupée par un plan, la section est un cercle. Or, ce cercle se nomme *grand cercle*, lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphere; & *petit cercle*, lorsqu'il n'y passe point.

494. On nomme *Cône*, une espece de pyramide, dont la base est un cercle.

Fig. 9. *Le solide $ABCD^*$ est un cône.*

495. On nomme *Axe* d'un cône, une ligne droite qui est tirée du sommet de ce cône, au centre de sa base.

Fig. 9. *La ligne BE^* est l'axe du cône $ABCD$.*

496. On nomme *Cône droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base; & *Cône incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

497. On nomme *Cylindre*, une espece de prisme, dont les bases sont des cercles égaux & paralleles.

Fig. 10. *Le solide X^* est un cylindre.*

498. On nomme *Axe* d'un cylindre, une ligne droite qui est tirée du centre de la base supérieure de ce cylindre, au centre de sa base inférieure.

La ligne GH est l'axe du cylindre X.* Fig. 10.

499. On nomme *Cylindre droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base ; & *Cylindre incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

500. On dit que des cônes sont *semblables*, lorsque leurs axes sont proportionnels aux diamètres de leurs bases ; & il en est de même des cylindres.

501. On nomme *Exaëdre*, ou *Cube*, un prisme qui est terminé par six quarrés.

502. On nomme *Tétraëdre*, une pyramide qui est terminée par quatre triangles équilatéraux & égaux.

503. On nomme *Octaëdre*, un solide qui est terminé par huit triangles équilatéraux & égaux.

504. On nomme *Dodécaëdre*, un solide qui est terminé par douze pentagones réguliers & égaux.

505. On nomme *Icosaëdre*, un solide

qui est terminé par vingt triangles équilatéraux & égaux.

Il est impossible qu'il y ait des corps réguliers qui soient différens de la sphere, ou de ces cinq derniers solides.

506. Enfin, on nomme *Parallélépipede*, un solide qui est terminé par six plans parallèles.

507. On dit d'un solide, qu'il est *inscrit* dans un autre, lorsqu'il a tous ses angles dans la surface de cet autre : & qu'il est *circonscrit* à un autre, lorsque sa surface touche tous les angles de cet autre.





PREMIERE PARTIE.

DES PLANS.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

508. *Toutes les parties d'une ligne droite sont dans le même plan.*

UNE ligne droite AB * dans le plan Fig. 11.
X, & une ligne droite BC hors de
ce plan, ne sont point une seule ligne
droite.

Const. Du même point B élevez dans
le plan X (n), la perpendiculaire BE à la N. 95.
ligne AB; & la perpendiculaire BD à
la ligne BE.

Démonst. La somme des angles EBA
& EBD, est égale à celle de deux angles
droits. Ainsi, les lignes AB & BD, qui
sont tirées du même point B de la ligne
droite BE, ne sont qu'une seule ligne
droite ABD (n).

N. 100.

Par conséquent, les lignes AB & BC,
ne sont point une seule ligne droite.

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

509. *Deux lignes droites qui ont un point de commun , sont dans le même plan.*

Fig. 12. **L**ES lignes droites AB * & CD qui ont le point E de commun , sont dans le même plan.

Const. Du point A pris à volonté sur la ligne AB , tirez à un point quelconque D de la ligne CD , une ligne droite AD .

Démonst. La partie AE de la ligne AB est dans le plan du triangle AED , puisqu'elle est l'un des côtés de ce triangle ; & par une raison pareille , la partie DE de la ligne CD est aussi dans le même plan. Ainsi , les lignes AB & CD ont chacune une partie dans le même plan.

N. 508. Par conséquent , elles y sont aussi (n).
Donc , C. Q. F. D.



PROPOSITION III.

THÉORÈME.

510. *La commune section de deux plans, est une ligne droite.*

LA commune section AB * des plans fig. 13.
CD & EF, est une ligne droite.

Démonst. Si la ligne AB, dont les extrémités A & B sont dans les plans CD & EF [H], se courboit entre ces extrémités, ou vers E, ou vers F, elle sortiroit du plan CD; si elle se courboit, ou vers C, ou vers D, elle sortiroit du plan EF; & si elle se courboit vers tout autre côté, elle sortiroit en même temps & du plan CD, & du plan EF. Or, dans tous ces cas, elle ne seroit plus la commune section de ces deux plans (n). N. 472.

Donc, puisqu'elle est cette commune section [H], elle va directement du point A au point B; & par conséquent, elle est une ligne droite (n). N. 7.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

511. *Si de trois lignes droites qui ont un point de commun, l'une est perpendiculaire aux deux autres, elle l'est aussi à leur plan.*

Fig. 14. **L**A ligne droite AB^* qui est perpendiculaire aux lignes droites CD & EF , avec lesquelles elle a le point B de commun, l'est aussi à leur plan X .

Const. Du point B , pris pour centre, & avec tel rayon qu'il vous plaira, prenez sur les lignes CD & EF , les parties égales BC , BE , BD & BF . Tirez du point C au point E , la ligne droite CE ; & du point F au point D , la ligne droite FD . Par le point B , tirez dans le plan X , une ligne droite quelconque GH , qui rencontre les précédentes CE & FD , à deux points quelconques G & H . Enfin, tirez du point A aux points C , G , E , D , H & F , les lignes droites AC , AG , AE , AD , AH & AF .

Démonst. Premièrement. Dans les triangles ABC , ABE , ABD & ABF ,

qui sont tous rectangles en B [H], les côtés BC, BE, BD & BF, sont égaux [C], & le côté AB est commun. Ainsi, les côtés AC, AE, AD & AF, sont aussi égaux (n).

N. 82.

Secondement. Dans les triangles EBC & DBF, l'angle EBC est égal à l'angle DBF (n); & les côtés BC & BE sont égaux aux côtés BD & BF, chacun à chacun [C]. Ainsi, le côté CE est égal au côté FD, & l'angle BCE à l'angle BDF (n).

N. 101.

N. 82.

Troisièmement. Dans les triangles GBC & HBD, le côté BC est égal au côté BD [C], l'angle BCE à l'angle BDF [D], & l'angle CBG à l'angle DBH (n). Ainsi, le côté CG est égal au côté DH, & le côté BG au côté BH (n).

N. 123.

Quatrièmement. Dans les triangles ACE & ADF, le côté AC est égal au côté AD [D], le côté AE au côté AF [D], & le côté CE au côté FD [D]. Ainsi, l'angle ACE est égal à l'angle ADF (n).

N. 88.

Cinquièmement. Dans les triangles ACG & ADH, l'angle ACE est égal à l'angle ADF [D], le côté AC au côté AD [D], & le côté CG au côté DH [D]. Ainsi, le côté AG est égal au côté AH (n).

N. 82.

Sixièmement. Enfin , dans les triangles
 ABG & ABH , le côté AG est égal au
 côté AH [D] , le côté BG au côté BH
 [D] , & le côté AB est commun. Ainsi ,
 N. 88. l'angle ABG est égal à l'angle ABH (n).

Par conséquent , la ligne AB est perpendi-
 N. 19. culaire à la ligne GH (n).

Or , la même démonstration subsiste ,
 en quelque endroit du plan X que l'on
 tire la ligne GH , pourvu qu'elle passe par
 le point B. Donc , la ligne AB est per-
 pendiculaire à toutes les lignes de ce plan ,
 avec lesquelles elle peut avoir un point de
 commun. Par conséquent , elle l'est aussi
 N. 473. à ce même plan (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION V.

THÉORÈME.

512. *Si de quatre lignes droites qui ont un point de commun, l'une est perpendiculaire aux trois autres, ces trois dernières sont chacune dans le même plan.*

SI la ligne droite AB^* est perpendiculaire aux lignes droites BC , BD & BE , avec lesquelles elle a le point B de commun, ces trois dernières lignes sont chacune dans le même plan. Fig. 15.

Démonst. Puisque les lignes BC & BD ont le point B de commun $[H]$, elles sont dans un même plan X (n). Ainsi, si la ligne BE est la commune section de ce plan & d'un autre plan quelconque, les lignes BC , BD & BE , sont chacune dans un même plan; puisqu'alors cette ligne BE sera aussi dans le plan X (n). N. 509.
N. 472.

Or, la ligne BE est la commune section de ce dernier plan & du plan Y , qui est celui des lignes AB & BE (n). Car, puisque la ligne AB est perpendiculaire aux lignes BC & BD $[H]$, elle l'est aussi au plan X de ces lignes (n); & par con- N. 509.
N. 511.

féquent , à toutes les lignes de ce plan ; avec lesquelles elle peut avoir un point
 N. 473. de commun (n). Or , elle a nécessairement le point B de commun avec la commune section de ce même plan & du plan Y. Donc , elle est perpendiculaire à cette commune section.

Mais , de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point B , dans le plan Y , la ligne BE est la seule à laquelle cette ligne AB puisse être perpendiculaire ; puisqu'elle l'est à cette dernière ligne [H] , & que d'un même point on ne peut élever dans un même plan , qu'une seule perpendiculaire à une même ligne droite. Donc , cette ligne BE est la commune section du plan X & du plan Y.

Par conséquent , C. Q. F. D.



PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

513. *Deux lignes droites qui sont perpendiculaires chacune au même plan ,
sont parallèles.*

LES lignes droites AB^* & CD qui sont Fig. 16.
perpendiculaires chacune au plan X , sont
parallèles.

Const. Tirez du point B au point D ,
la ligne droite BD . Du point D , élevez
dans le plan X (n), la perpendiculaire N. 95.
 ED à cette ligne BD . Faites cette per-
pendiculaire égale à la ligne AB . Enfin,
tirez du point B au point E , la ligne droite
 BE ; & du point A aux points E & D ,
les lignes droites AE & AD .

Démonst. Les lignes AB & CD sont
perpendiculaires chacune à la ligne BD
(n); puisqu'elles le sont chacune au plan N. 473.
 X [H]. Ainsi, si elles sont chacune dans
le même plan, elles sont parallèles (n). N. 129.

Or, ces lignes sont chacune dans le
même plan. Car, les triangles ABD &
 EDB sont rectangles, l'un en B (n), & N. 473.
l'autre en D [C]; ils ont le côté AB égal

au côté ED [c]; & le côté BD leur est commun. Donc, le côté AD est égal au

N. 82. côté BE (n).

Ainsi, dans les triangles ADE & ABE, le côté AD est égal au côté BE [D], le côté ED au côté AB [C], & le côté AE est commun. Donc, l'angle ADE est égal

N. 88. à l'angle ABE (n). Par conséquent, puis-

N. 473. que ce dernier angle est droit (n), l'angle ADE l'est aussi.

Ainsi, la ligne ED est perpendiculaire à la ligne AD [D], à la ligne BD [C], &

N. 473. à la ligne CD (n). Donc, cette ligne

CD est dans le même plan que les lignes

N. 512. AD & BD (n). Or, la ligne AB y est

aussi; puisqu'elle est l'un des côtés du triangle ADB, dont ces lignes AD & BD sont les autres côtés. Donc, les lignes AB & CD sont chacune dans le même plan.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

514. Il suit de la démonstration de ce théorème, que *si deux lignes droites sont parallèles, elles sont chacune dans le même plan.*



PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

515. *Une ligne droite qui en rencontre deux autres qui sont parallèles, est dans le même plan que ces dernières.*

LA ligne droite EF^* , qui rencontre aux Fig. 17. points E & F les lignes droites & parallèles AB & CD , est dans le même plan que ces parallèles.

Démonst. Si l'on suppose que le plan des parallèles AB & CD soit coupé par un autre plan quelconque qui passe par les points E & F , la commune section de ces deux plans y passera aussi. Ainsi, ces deux points seront communs & à cette commune section, & à la ligne droite EF . Mais, cette même commune section fera aussi une ligne droite (n). Donc, la N. 510. ligne droite EF est cette commune section (n). N. 74.

Or, puisque la ligne EF est la commune section du plan des parallèles AB & CD & d'un certain autre plan, elle est dans le même plan que ces parallèles (n). N. 472.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

516. *Si de deux lignes droites qui sont parallèles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre est aussi perpendiculaire au même plan.*

Fig. 16. **S**I la ligne droite AB^* , qui est parallèle à la ligne CD , est perpendiculaire au plan X , la ligne CD est aussi perpendiculaire au même plan X .

Const. La même que celle du n° 513.

Démonst. Les lignes DA & DB rencontrent les lignes AB & CD [c], qui sont parallèles [H]. Ainsi, ces quatre li-
N. 515. gnes sont chacune dans le même plan (n).

Or, la ligne ED est perpendiculaire à ce
N. 511. plan (n); puisqu'elle l'est & à la ligne DE [c], & à la ligne DA , par une démonstration pareille à celle du n° 513.

Donc, elle est aussi perpendiculaire à la
N. 473. ligne CD (n).

Mais la ligne BD est aussi perpendiculaire à cette même ligne CD (n). Donc,
N. 131. cette ligne CD est perpendiculaire au plan
N. 511. X (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

517. *Deux lignes droites qui sont parallèles chacune à une même ligne, le sont aussi entr'elles, quand même elles ne seroient point dans le même plan que cette dernière.*

LES lignes droites AB^* & CD , qui Fig. 18. ne sont point dans le même plan que la ligne EF^\dagger , mais qui sont parallèles chacune à cette dernière ligne, le sont aussi entr'elles.

Const. Du point G , pris à volonté sur la ligne EF , abaissez (n) une perpendiculaire GH à la ligne AB ; & une perpendiculaire GI à la ligne CD . N. 96.

Démonst. La ligne EF est perpendiculaire & à la ligne GH , & à la ligne GI (n). Ainsi, elle l'est aussi au plan de ces N. 131. lignes (n). Mais, les lignes AB & CD N. 511. sont parallèles chacune à cette ligne EF [H]. Donc, elles sont aussi perpendicu-

\dagger Si les trois lignes proposées étoient dans le même plan, cette proposition seroit la même que celle du n° 132.

N. 516. laires chacune à ce même plan (n). Par conséquent, elles sont aussi parallèles entre
 N. 513. elles (n).

Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

518. *Les angles dont les sommets regardent le même côté, & dont les côtés sont parallèles, chacun à chacun, sont égaux; quand même ils ne seroient point dans le même plan.*

Fig. 19. **L**ES angles ABC* & DEF, dont les côtés ED & BA, EF & BC sont parallèles, chacun à chacun, sont égaux; quand même ils seroient dans des plans différens.

Const. Prenez à volonté sur les côtés des angles proposés, les parties égales BA & ED, BC & EF. Tirez ensuite, des points A, B & C, aux points D, E & F, les lignes droites AD, BE & CF; & des points A & D aux points C & F, les lignes droites AC & DF.

Démonst. Puisque dans le quadrilatère AE, les côtés BA & ED sont égaux [C] & parallèles [H], le côté AD est égal &

parallele au côté BE (n). Et par une raison N. 142. pareille, le côté BE est aussi égal & parallele au côté CF. Donc, les côtés AD & CF du quadrilatere CD sont égaux & paralleles (n). Par conséquent, le côté N. 62. AC est égal au côté DF (n). N. 142.

Ainsi, dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED [c], le côté BC au côté EF [c], & le côté AC au côté DF [d]. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle DEF (n).

N. 88.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

519. *D'un point donné hors d'un plan, abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut abaisser du point A *, une per- Fig. 20.
pendiculaire au plan X.

Const. Tirez à volonté dans le plan X, une ligne droite BC. Abaissez du point A (n), la perpendiculaire AD à cette ligne. N. 96. Du point D, élevez dans le même plan (n), la perpendiculaire DE à cette même N. 95. ligne. Enfin (n), abaissez du même point N. 96. A, la perpendiculaire AE à la ligne DE. Elle sera la perpendiculaire demandée.

Pour la démonstration. Tirez par le
N. 133. point E (n), la parallele FG à la ligne
BC.

Démonst. La ligne BC est perpendi-
N. 511. culaire au plan du triangle ADE (n);
puisqu'elle l'est & à la ligne AD, & à
la ligne DE [c]. Donc, puisque la ligne
FG est parallele à cette ligne BC [c],
elle est aussi perpendiculaire au même
N. 516. plan (n); & par conséquent, à la ligne
N. 473. AE (n).

Ainsi, la ligne AE est perpendiculaire
à la ligne DE [c], & à la ligne FG [d].
N. 511. Donc elle l'est aussi au plan X (n).

Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

*Ce Problème sert, dans la Gnomonique,
à trouver le pied du style.*



PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

520. *D'un point donné dans un plan, élever une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut élever du point A^* , une perpen- Fig. 215
diculaire au plan X .

Const. Du point B , pris à volonté hors du plan X , abaissez (n) une perpen- N. 519
diculaire BC à ce plan. Tirez ensuite par le point A (n), une parallèle AD à cette N. 133
ligne BC . Elle sera la perpendiculaire demandée.

Démonst. La ligne BC est perpendiculaire au plan X [C]. Ainsi, puisque la ligne AD est parallèle à cette ligne BC [C], elle est aussi perpendiculaire au même plan (n).

N. 516.

Par conséquent, C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

521. *D'un même point, on ne peut ni élever, ni abaisser, plus d'une perpendiculaire au même plan.*

Fig. 22. **O**N ne peut du point A *, élever plus d'une perpendiculaire au plan X ; ni du point B , lui en abaisser plus d'une.

Démonst. Les lignes droites qui sont perpendiculaires chacune au même plan, N. 513. sont parallèles (n). Ainsi, elles n'ont au-
N. 56. cun point de commun (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

522. Il suit de ce théorème, que si deux plans sont perpendiculaires, toute ligne droite qui est tirée d'un point quelconque de l'un de ces plans, perpendiculairement à l'autre, passe par leur commune section.

Fig. 23. Si le plan Y * est perpendiculaire au plan X, toute perpendiculaire à ce dernier plan, qui sera tirée d'un point quelconque A du premier, passera par leur commune section CD.

Const.

Const. Abaissez du point A (n), une ^{N. 96.} perpendiculaire AB à la commune section CD.

Démonst. La ligne AB est dans le plan Y, puisque ses points A & B y sont [C]. Ainsi, puisqu'elle est perpendiculaire à la commune section CD [C], elle l'est aussi au plan X (n). ^{N. 475.}

Or, cette ligne, qui est la seule perpendiculaire à ce plan, que l'on puisse tirer du point A (n), passe par la commune ^{N. 521.} section CD [C]. Donc, toute ligne droite qui étant tirée du même point ne passe pas par cette commune section, n'est point perpendiculaire à ce plan.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

523. *Si une même ligne droite est perpendiculaire à deux plans, ces plans sont parallèles.*

SI la ligne droite AB * est perpendiculaire au plan AD & au plan BC, ces plans sont parallèles. ^{Fig. 24}

Const. Du point D, pris à volonté
X

N. 133. dans le plan AD, tirez (n) la parallèle DC à la ligne AB. Tirez ensuite, des points A & B aux points D & C, les lignes droites AD & BC.

Démonst. Les lignes AD & BC sont
 N. 515. chacune dans le même plan (n); puisque [C] elles rencontrent les lignes AB & DC qui sont parallèles [C]. Ainsi, puisqu'elles sont perpendiculaires chacune à la même
 N. 473. ligne AB (n), elles sont aussi parallèles
 N. 129. (n). Donc, le quadrilatère AC est un parallélogramme. Par conséquent, le point D est aussi éloigné du point C, que le
 N. 143. point A l'est du point B (n).

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du plan AD que l'on prenne le point D. Donc, tous les points de ce plan sont également éloignés de tous les points correspondans du plan BC. Par conséquent, ces deux plans sont parallèles (n).
 N. 478. les (n).

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

524. *Si deux angles qui sont dans des plans différens, ont leurs côtés parallèles, chacun à chacun, ces plans sont aussi parallèles.*

SI les côtés BA * & BC, ED & EF Fig. 25.
des angles ABC & DEF, qui sont l'un
dans le plan X & l'autre dans le plan Y,
sont parallèles chacun à chacun, ces plans
sont aussi parallèles.

Const. Abaissez du point B (n), une N. 519.
perpendiculaire BG au plan Y. Tirez en-
suite (n), du point G auquel cette per- N. 133.
pendiculaire rencontre ce plan, une pa-
rallele GI au côté EF; & une parallèle
GH au côté ED.

Démonst. Les lignes BC & GI sont
parallèles entr'elles (n); puisqu'elles le N. 517.
sont l'une [H] & l'autre [C] à la même
ligne EF. Et par une raison pareille, les
lignes BA & GH sont aussi parallèles.

Ainsi, puisque la ligne BG est perpen-
diculaire aux lignes GI & GH (n), elle N. 473.
l'est aussi à leurs parallèles BC & BA
(n); & par conséquent au plan X (n). N.

X ij

Or, puisque la ligne BG, qui est perpendiculaire au plan Y [C], l'est aussi au plan X [D], ces deux plans sont parallèles (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

525. *Si deux plans qui sont coupés par un troisième, sont parallèles, leurs communes sections sont aussi parallèles.*

Fig. 26. **SI** les plans X* & Y, qui sont coupés par le plan Z, sont parallèles, leurs communes sections AB & CD sont aussi parallèles.

Démonst. Lorsque les lignes droites qui sont chacune dans le même plan, ne sont point parallèles, elles se rencontreroient, si on les prolongeoit autant qu'il le seroit nécessaire.

Or, les communes sections AB & CD
 N. 510. sont des lignes droites (n); elles sont
 N. 472. chacune dans le même plan Z (n); & étant prolongées autant qu'on le voudroit, elles ne se rencontreroient point; puisque elles sont aussi l'une dans le plan X, &

l'autre dans le plan Y (n), qui ne se ren- N. 472
contrent point (n). Donc, elles sont N. 479
paralleles.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

526. *Si des plans paralleles coupent plusieurs lignes droites, ces lignes sont coupées proportionnellement.*

SI les plans X* Y & Z, qui coupent Fig. 27.
les lignes droites AB & CD, sont paralleles, on a cette proportion, AE . EB :: CF . FD.

Const. Tirez du point A au point D, la ligne droite AD.

Démonst. Le plan du triangle BAD coupe les plans Y & Z, qui sont paralleles [H]. Ainsi, leurs communes sections EG & BD sont paralleles (n). N. 525.

Pareillement, le plan du triangle ADC coupe les plans Y & X, qui sont aussi paralleles [H]. Ainsi, leurs communes sections GF & AC sont aussi paralleles (n). N. 525.

Or, puisque les lignes EG & BD sont paralleles, on a cette proportion AE . EB :: AG . GD (n) : & par une raison pa- N. 411.

reille, $AG : GD :: CF : FD$. Donc,
N. 350. $AE : EB :: CF : FD$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

527. *Si une ligne droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels cette perpendiculaire se trouve, sont aussi perpendiculaires à ce même plan.*

Fig. 28. **S**I la ligne droite AB^* qui est dans le plan Y , est perpendiculaire au plan X , le plan Y est aussi perpendiculaire au plan X .

Const. Du point F , pris à volonté dans la commune section CD , tirez (n) une parallèle EF à la ligne AB .
N. 133.

Démonst. La ligne AB est perpendiculaire au plan X [H]. Ainsi, la ligne EF , qui est parallèle à cette ligne [C], est aussi perpendiculaire au même plan (n); & par conséquent à la commune section CD (n).
N. 516.
N. 473.

Or, il en est de même de toutes les parallèles à la ligne AB que l'on peut tirer dans le plan Y . Donc, ce plan est perpendiculaire au plan X (n).
N. 475.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

528. *Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires chacun à un troisieme, leur commune section lui est aussi perpendiculaire.*

LA commune section AB* des plans Y ^{Fig. 29.} & Z qui sont perpendiculaires chacun au plan X, est aussi perpendiculaire au même plan.

Démonst. La commune section AB doit être en même tems dans le plan Y & dans le plan Z (n). Or, si elle inclinoit vers C, ^{N. 472.} ou vers D, elle ne seroit plus dans le plan Z : si elle inclinoit vers E, ou vers F, elle ne seroit plus dans le plan Y : & si elle inclinoit vers tout autre côté, elle ne seroit dans aucun de ces plans. Donc, elle n'incline vers aucun côté du plan X. Par conséquent, elle est perpendiculaire à ce plan.

Donc, C. Q. F. D.





SECONDE PARTIE. DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

529. *Lorsque trois angles plans forment un angle solide, chacun de ces trois angles est plus petit que la somme des deux autres.*

Fig. 30. **L**A somme de deux quelconques des trois angles plans BAC^* , CAD & BAD , qui forment l'angle solide A , par exemple, celle des angles BAC & CAD , est plus grande que l'angle BAD .

Const. Sur le côté AB du plus grand N. 119. des angles proposés, décrivez (n) un angle BAE qui ait le point A pour sommet, & soit égal à l'angle BAC . Prenez à volonté sur les côtés AC & AE , les parties égales AC & AE . Du point B , pris à volonté sur le côté AB , tirez au point C la ligne droite BC ; & par le point E ,

la ligne droite BED. Enfin, tirez aussi du point C au point D, la ligne droite CD.

Démonst. Les triangles BAC & BAE ont l'angle BAC égal à l'angle BAE, le côté AC au côté AE, & le côté AB de commun [C]. Donc, le côté BC est égal au côté BE (n). Par conséquent, puisque N. 82. dans le triangle BCD, la somme des côtés BC & CD est plus grande que le côté BED (n), si de cette somme on retran-N. 114. che le côté BC, & du côté BED le côté BE, le reste CD de cette somme est plus grand que le reste ED de ce côté.

Ainsi, dans les triangles CAD & EAD, le côté AC est égal au côté AE [c], & le côté AD est commun; mais le côté CD est plus grand que le côté ED. Donc, l'angle CAD est aussi plus grand que l'angle EAD (n). Par conséquent, puisque N. 122. les angles BAC & BAE sont égaux [c], la somme des angles BAC & CAD est plus grande que l'angle BAD, qui est celle des angles BAE & EAD.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

530. *La somme de tous les angles plans qui forment un angle solide, est plus petite que celle de quatre angles droits.*

Fig. 31. **L**A somme des angles plans BAC^* , CAD & BAD , qui forment l'angle solide A , est plus petite que celle de quatre angles droits.

Démonst. Dans le triangle BCD , la somme des angles BCD , CDB & CBD , est égale à celle de deux angles droits.

N. 136. (n). Or, les angles ACB & ACD valent
 N. 529. plus que l'angle BCD (n), puisque l'angle C est un angle solide : & par une raison pareille, les angles ADC & ADB valent plus que l'angle CDB ; & les angles ABC & ABD , plus que l'angle CBD .
 Donc, les six angles ACB , ACD , ADC , ADB , ABC & ABD , valent plus de deux angles droits. Mais, ces six mêmes angles, avec les angles BAC , CAD & BAD , ne valent que fix angles droits
 N. 136. (n); puisqu'avec ces trois derniers, ils font tous les angles des triangles BAC ,

CAD & BAD. Donc, ces trois derniers angles ne valent point quatre angles droits.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

531. Il suit de ce théorème, que les seules figures régulières dont les angles peuvent former des angles solides, sont les triangles équilatéraux, les quarrés & les pentagones.

PROPOSITION XXIV †.

THÉORÈME.

532. Si tous les plans qui terminent un solide sont parallèles, chacun à chacun, ils sont parallélogrammes; & les opposés sont égaux & semblables.

SI tous les plans AC*, EG, ED, &c. Fig. 32. qui terminent le solide X, sont parallèles, chacun à chacun, ils sont parallélogrammes: & les opposés AC & EG, ED & FC, &c. sont égaux & semblables.

Démonst. Les côtés AD & BC sont parallèles (n); puisqu'ils sont les commu- N. 525

† Les propositions 22 & 23 sont inutiles.

nes sections du plan AC, & des plans paralleles [H] AH & BG. Et par une raison pareille, les côtés AB & DC sont aussi paralleles.

Or, on démontre de la même maniere le parallélisme des côtés, dans les quadrilateres EG, ED, FC, &c. Ainsi, tous ces

N. 57. quadrilateres sont parallélogrammes (n).

Mais, puisque tous ces quadrilateres sont parallélogrammes, les côtés AB & EF du quadrilatere EB sont égaux; & les côtés AD & EH du quadrilatere ED le
 N. 143. sont aussi (n): d'ailleurs, les angles DAB
 N. 518. & HEF sont égaux (n); puisque leurs côtés AD & EH, AB & EF, sont paral-
 N. 525. leles chacun à chacun (n). Ainsi, les parallélogrammes AC & EG sont égaux & semblables.

Or, par la même raison, les parallélogrammes ED & FC, EB & HC, sont aussi égaux & semblables.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVIII†.

THÉORÈME.

533. *Un plan qui coupe diagonalement deux des plans opposés d'un parallélépipède, divise ce solide en deux parties, qui sont égales & semblables.*

LE plan AG* qui coupe diagonalement Fig. 331 les deux parallélogrammes opposés ED & FC du parallélépipède X, divise ce solide en deux parties EGA & DBH, qui sont égales & semblables.

Démonst. Le plan EB est égal & semblable au plan HC, & le plan EG au plan AC; puisque dans les parallélépipèdes, les plans opposés sont égaux & semblables (n). Or, le plan EAH est aussi égal N. 532 & semblable au plan DHA, & le plan FBG au plan CGB; puisque les parallélogrammes sont divisés par leurs diagonales, en deux parties égales & semblables (n). N. 143. Donc, les solides EGA & DBH, qui sont terminés par ces plans & par un plan commun AG, sont égaux & semblables (n).

N. 48E

Par conséquent, C. Q. F. D.

† Les propositions 25, 26 & 27, sont inutiles.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

534. *Les parallélépipèdes qui ont la même base, & sont entre les mêmes plans parallèles, sont égaux.*

Fig. 34 & 35. **L**ES parallélépipèdes X^* & Y , qui ont la même base BD , & sont entre les mêmes plans parallèles AC & EL , sont égaux.

Les côtés EF & IK sont chacun dans la même ligne droite; ou ils n'y sont point.

PREMIER CAS.

Fig. 34. Lorsque les côtés EF^* & IK sont chacun dans la même ligne droite EK .

Démonst. Le plan AH est égal & semblable au plan DG , & le plan AM au plan DL ; puisque dans les parallélépipèdes, les plans opposés sont égaux & semblables (n). Le plan HI est aussi égal & semblable au plan GK ; puisque les plans EG & IL sont égaux & semblables l'un & l'autre au plan BD (n). Enfin, par une démonstration pareille à celle du n° 147, le plan AEI est égal & semblable au plan

DFK ; & le plan BHM au plan CGL. Donc , les prismes triangulaires AME & DLF qui sont terminés par ces plans , sont égaux (n).

N. 481.

Par conséquent , si l'on retranche de chacun le même prisme triangulaire NMF qui leur est commun , les restes , qui sont les solides AOE & DOK , sont aussi égaux (n). Mais , puisque ces solides sont N. 63. égaux , si l'on ajoute à chacun le même prisme triangulaire , DBN , les sommes sont égales (n). Or ; ces sommes sont les N. 64. parallélépipèdes X & Y. Donc , ces parallélépipèdes sont égaux.

SECOND CAS.

Lorsque les côtés EF & IK ne sont point* Fig. 35.
chacun dans la même ligne droite.

Const. Prolongez les côtés EF, HG , MI & LK , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à des points N , O , P & Q. Tirez ensuite , des points A , B , C & D , aux points N , O , P & Q , les lignes droites AN , BO , CP & DQ.

Démonst. Le plan QO est égal , semblable & parallèle au plan DB [C]. Ainsi , le solide DBOQ est un parallélépipède (n). Or [C] , ce parallélépipède & le pa-N. 505. rallélépipède X ont la même base BD ,

font entre les mêmes plans paralleles AC & EOM, & ont leurs côtés NO & EF dans la même ligne droite EO. Ainsi, ils sont égaux [D].

Mais, ce même parallélépipede DBOQ & le parallélépipede Y sont aussi égaux [D]; puisque [C] ils ont aussi la même base BD, sont entre les mêmes plans paralleles AC & EOM, & ont leurs côtés NQ & IM dans la même ligne droite NM. Donc, les parallélépipedes X & Y sont
N. 62. égaux (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

535. Il suit de ce théorème, que les parallélépipedes qui ont des bases égales, & sont entre les mêmes plans paralleles, sont égaux.

SCHOLIE.

536. Comme le mesurage des solides dépend primitivement de celui des parallélépipedes rectangles, nous allons enseigner la maniere de mesurer ces figures, conformément à ce que nous avons promis au n^o 149.

Mesurer un solide, c'est considérer la maniere dont il contient un certain cube que
N. 148. l'on prend pour mesure (n). Ainsi, pour

savoir mesurer un parallélépipede rectangle, il suffit de savoir déterminer la maniere dont il contient le cube que l'on veut prendre pour mesure.

Or, il est évident que si le parallélogramme AC^* , qui est l'une des faces d'un Fig. 36. parallélépipede rectangle quelconque DL , contient, par exemple, quatre quarrés AF , HG , &c. égaux chacun à la base st du cube M , (que nous supposons être la mesure dont on veut se servir), ce parallélépipede peut être divisé en quatre autres EK , FL , &c. qui auront chacun une base AF , HG , FD , &c. égale à cette base st . Et si la hauteur AI contient, par exemple, trois fois la hauteur su de cette mesure M , il est encore évident que chacun des parallélépipedes EK , FL , &c. peut être subdivisé en trois autres, qui auront aussi la même hauteur que cette même mesure M . Ainsi, tout le parallélépipede rectangle DL pourroit être divisé en quatre fois 3, ou 12 solides égaux chacun à la mesure M ; & contient par conséquent 12 parties égales chacune à cette mesure.

D'où l'on conclut cette regle générale du mesurage des parallélépipedes rectangles.

537. La solidité † d'un parallélépipede

† La solidité se nomme aussi le volume.

rectangle, est égale au produit du nombre des mesures quarrées qui sont contenues dans sa base, multiplié par le nombre des mesures courantes qui se trouvent dans sa hauteur : ou, pour nous servir de l'expression ordinaire, un parallélépipède rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Et cette règle convient également à un
 Fig. 37. *parallélépipède incliné quelconque* X^* . Car,
 N. 534. *puisque* (n) *ce parallélépipède incliné est*
égal à un parallélépipède rectangle Y *qui*
auroit la même base AB *que lui, & seroit*
entre les mêmes plans parallèles AB & GH , *on a également la solidité du parallé-*
lépipède incliné X , *comme celle du parallé-*
lépipède rectangle Y , *en multipliant la base*
 AB par la hauteur EF . Or, c'est la même
 chose de multiplier cette base par la hauteur
 EF , que de la multiplier par la hauteur CD ;
 puisque les plans AB & GH étant paral-
 leles, ces hauteurs sont égales.



PROPOSITION XXXII†.

THÉORÈME.

538. *Les parallélépipèdes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

LES parallélépipèdes AL * & MX qui Fig. 38. ont des hauteurs égales, sont entr'eux, ce que le parallélogramme AC est au parallélogramme MO.

Const. Divisez la plus petite AC des deux bases AC & MO, en tel nombre de parallélogrammes égaux qu'il vous plaira; par exemple, en trois parallélogrammes égaux AF, EH & GC. Décrivez ensuite sur le côté MR (n), un N. 165. parallélogramme MS qui soit égal au parallélogramme AF; & qui ait l'angle RMN pour l'un de ses angles. Enfin, faites passer par chaque ligne de division EF & GH, des plans EI & GK parallèles au plan BL; & par la ligne PS, un plan PT parallèle au plan NX.

Démonst. Les parallélépipèdes AI, EK, GL & MT, sont égaux (n); puisqu'ils N. 535. ont des bases égales [C], & des hauteurs

† Les propositions 30 & 31 sont inutiles.

égales [H]. Ainsi, l'on démontre que le parallélépipède AL est au parallélépipède MX, ce que la base AC est à la base MO, par un raisonnement tout pareil à celui dont on s'est servi au n° 405, pour démontrer que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont aussi entr'eux comme leurs bases.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

539. *Les parallélépipèdes semblables sont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils.*

Fig. 39. **S**I les parallélépipèdes AD * & BM sont semblables, le rapport du premier au second, est triplé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté AB au côté BC.

Const. Disposez les parallélépipèdes AD & BM, de manière que les côtés BC & BG du plan supérieur BO, deviennent les prolongemens des côtés AB & FB du plan inférieur AF. Prolongez ensuite le parallélépipède AD, jusqu'à ce

que les plans MC & CK soient un même plan MCK ; & le parallélépipède BM, jusqu'à ce que les plans LH & HK soient aussi un même plan LHK.

Démonst. Le parallélépipède AD est au parallélépipède BK, ce que la base AF est à la base BN (n) : la base AF est à la N. 538. base BN, ce que le côté AB est au côté BC (n) : le côté AB est au côté BC, N. 405. ce que le côté FB est au côté BG (n) † : N. 480. le côté FB est au côté BG, ce que la base BN est à la base BO (n) : enfin la base N. 405. BN est à la base BO, ce que le parallélépipède BK est au parallélépipède BL (n). Donc, le parallélépipède AD est au N. 538. parallélépipède BK, ce que le même parallélépipède BK est au parallélépipède BL (n). Par conséquent, ces trois parallélé- N. 350. pipèdes sont en proportion continue (11). N. 334.

Pareillement, le parallélépipède BK est au parallélépipède BL, ce que la base BN est à la base BO (n) : la base BN est N. 538. à la base BO, ce que le côté FB est au côté BG (n) : le côté FB est au côté BG, N. 405. ce que le côté BH est au côté BI (n) : le N. 480. côté BH est au côté BI, ce que la base BQ est à la base BP (n) : enfin, la base N. 405.

† Les côtés pareils des solides semblables, sont proportionnels. Car les solides ne sont semblables, que parce que les plans qui les terminent le sont aussi, chacun à cha-
cun, n° 480.

- BQ est à la base BP, ce que le parallélépipède BL est au parallélépipède BM
 N. 538. (n). Donc, le parallélépipède BK est au
 parallélépipède BL, ce que le même pa-
 rallélépipède BL est au parallélépipède
 N. 350. BM (n). Par conséquent, ces trois der-
 niers parallélépipèdes sont aussi en pro-
 N. 334. portion continue (n).

- Ainsi, les quatre parallélépipèdes AD,
 BK, BL & BM, sont en proportion con-
 tinue. Par conséquent, le rapport du
 premier au dernier est triplé de celui du
 N. 348. premier au second (n). Mais, le rapport
 du premier au second est le même que
 N. 538. celui de la base AF à la base BN (n); &
 ce dernier rapport est le même que celui
 N. 405. du côté AB au côté BC (n). Donc, le
 rapport du parallélépipède AD au parallé-
 lèpipède BM, est triplé de celui du côté
 N. 350. AB au côté BC (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

540. Il suit de ce théorème, & du n°
 348, que si quatre lignes droites sont
 en proportion continue, un parallélépipède
 quelconque décrit sur la première, est à un
 parallélépipède semblable, & semblable-
 ment posé sur la seconde, ce que cette pre-
 mière ligne est à la quatrième.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

541. *Les parallélépipèdes dont les solidités sont égales, ont leurs bases & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & ceux dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, ont leurs solidités égales.*

PREMIÈREMENT. Si les parallélépipèdes Y^* & X sont égaux, la base CD est à la base AB , ce que la hauteur AE est à la hauteur CG . Fig. 40.

Const. Prenez sur la hauteur CG , une partie CF égale à la hauteur AE . Faites ensuite passer par le point F , un plan FH parallele à la base CD .

Démonst. La base CD est à la base AB , ce que le solide CH est au solide X (n), N. 538. ou Y [H] : le solide CH est au solide Y , ce que la base CI est à la base CK (n) : N. 538. enfin, la base CI est à la base CK , ce que la hauteur CF , ou AE [c], est à la hauteur CG (n). Donc, la base CD est à la base AB , ce que la hauteur AE est à la hauteur CG (n). N. 405. N. 350.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

N. 40. SECONDEMENT. Si la base CD^* est à la base AB , ce que la hauteur AE est à la hauteur CG , les parallélépipèdes Y & X sont égaux.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le solide CH est au solide X , ce que la base CD est à la base AB

N. 538. (n) : la base CD est à la base AB , ce que la hauteur AE , ou CF $[c]$, est à la hauteur CG $[H]$: la hauteur CF est à la hauteur CG , ce que la base CI est à la base

N. 405. CK (n) : enfin, la base CI est à la base CK , ce que le solide CH est au solide

N. 538. Y (n) . Donc, le solide CH est au solide X , ce que le même solide CH est au

N. 350. solide Y (n) ; & par conséquent, les so-

N. 356. lides Y & X sont égaux (n) .

Donc, C. Q. F. 2^o D.



PROPOSITION

PROPOSITION XXXVI†.

THÉORÈME.

542. Si trois lignes droites sont en proportion continue , un parallélépipède quelconque décrit avec ces trois lignes, est égal à un autre parallélépipède décrit avec la moyenne , & équiangle au premier.

LES parallélépipèdes équiangles X^* & Y Fig. 41. sont égaux, si le côté AC est moyen proportionnel entre les côtés AB & BL ; & si les côtés EG , EF & FM sont égaux chacun au côté AC .

Const. Abaissez du point C (n), la N. 96. perpendiculaire CI au côté AB ; & du point G , la perpendiculaire GK au côté EF .

Démonst. Puisque les parallélogrammes AL & EM sont équiangles $[H]$, le premier est au second, ce que le produit du côté AB multiplié par le côté BL , est à celui du côté EF multiplié par le côté FM (n). Or, ces produits N. 447. sont égaux (n); puisque, $AB \cdot EF :: N. 362,$

† La proposition 35 est inutile.

FM . BL [H]. Donc , ces parallélogrammes le font auffi. Mais , les perpendiculaires CI & GK font auffi égales (n) ; puisque dans les triangles ACI & EGK , qui font rectangles , l'un en I & l'autre en K [c] , le côté AC est égal au côté EG , & l'angle CAB à l'angle GEF [H]. Donc , les solides X & Y ont des bases égales , & des hauteurs égales. Par conséquent , ils font égaux (n).

N. 535. Donc , C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

543. Si quatre lignes droites sont proportionnelles, les parallélépipèdes semblables & semblablement posés sur les deux premières, sont proportionnels aux parallélépipèdes semblables & semblablement posés sur les deux dernières : & si deux parallélépipèdes semblables sont proportionnels à deux autres parallélépipèdes aussi semblables, les côtés pareils des premiers sont proportionnels aux côtés pareils des derniers.

PREMIÈREMENT. Si $AB \cdot CD :: EF$. Fig. 42.
 GH , les parallélépipèdes V & X , qui sont semblables & semblablement posés sur les deux premières, sont proportionnels aux parallélépipèdes Y & Z , qui sont aussi semblables & semblablement posés sur les deux dernières.

Démonst. La même que celle de la première partie du n° 445, en y substituant les noms de *parallélépipède* & de *rapport triplé*, à ceux de *polygone* & de *rapport doublé*.

SECONDEMENT. Si les parallélépipèdes V^* & X qui sont semblables, sont proportionnels aux parallélépipèdes Y & Z qui sont aussi semblables, les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, sont proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers.

Démonst. La même que celle de la seconde partie du n° 445, en y substituant le nom de *parallélépipède*, à celui de *polygone*.

S C H O L I E.

544 Tout ce que l'on démontre ici des parallélépipèdes, depuis la proposition 534 inclusivement, convient pareillement aux prismes triangulaires; car, un prisme triangulaire quelconque ECF^* , peut toujours être considéré comme étant la moitié d'un parallélépipède EN , coupé diagonalement par un plan CF . Or, puisque ce que nous disons des parallélépipèdes convient pareillement à tous les prismes triangulaires, il convient aussi à tous les prismes en général; car, il n'y a point de prisme, quel qu'il soit, qui ne puisse être divisé en prismes triangulaires; par la même raison qu'il n'y a point de polygone qui ne puisse être divisé en triangles.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

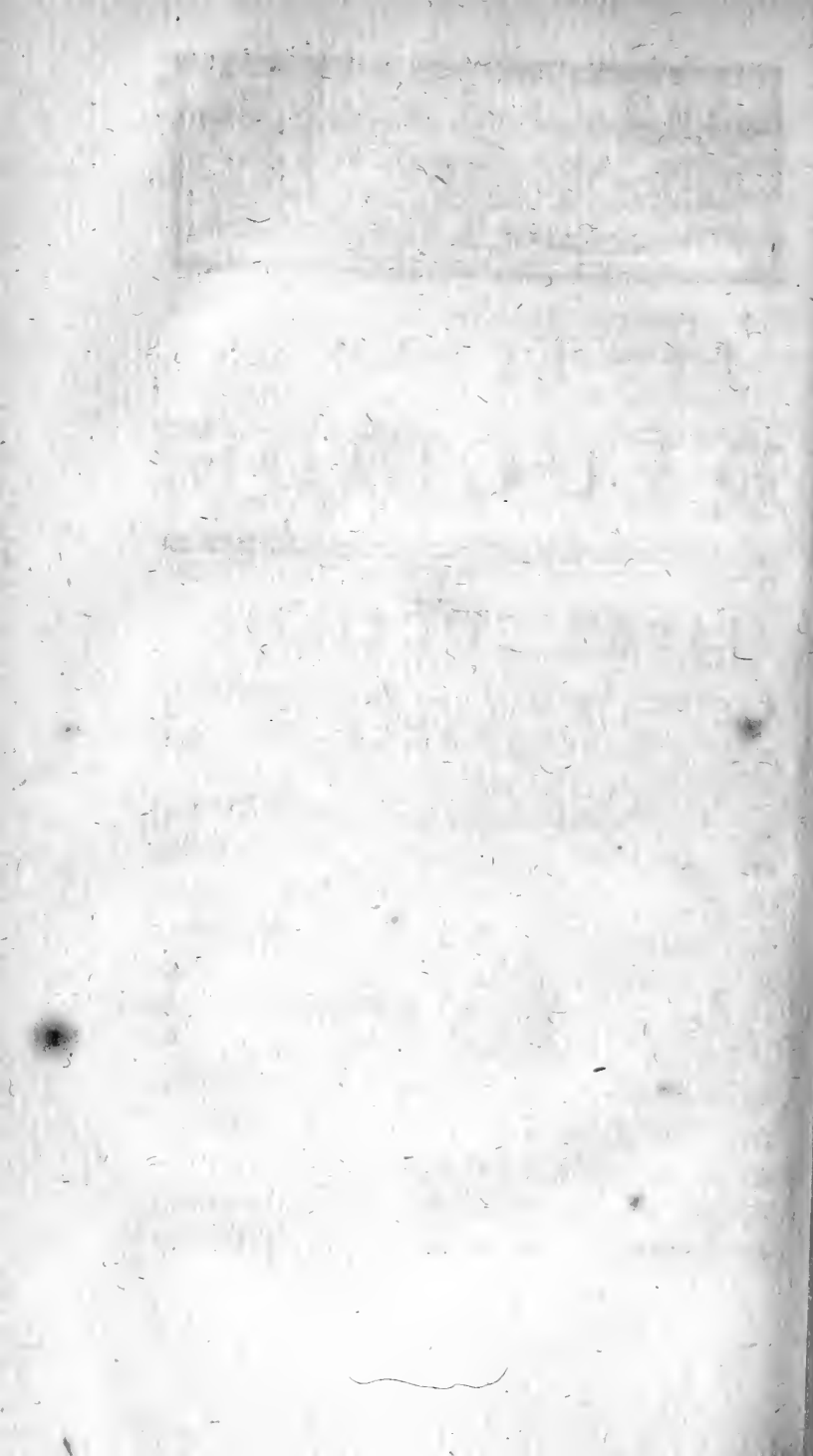
545 *Deux prismes triangulaires qui ont des hauteurs égales, sont égaux; s'ils ont pour bases, l'un un triangle, & l'autre un parallélogramme double de ce triangle.*

LES prismes triangulaires ECF* & LGI, Fig. 43. qui ont des hauteurs égales, sont égaux; si le triangle EDF qui est la base du premier, n'est que la moitié du parallélogramme LI qui est la base du second.

Démonst. Les parallélépipèdes EN & LO sont égaux (n); puisqu'ils ont des N. 535. hauteurs égales [H], & que le triangle EDF n'étant que la moitié du parallélogramme LI [H], les bases EP & LI sont aussi égales. Or, les prismes ECF & LGI sont les moitiés, l'un du parallélépipède EN, & l'autre du parallélépipède LO (n). N. 533.
Donc, ces prismes sont égaux (n). N. 684.

Par conséquent, C. Q. F. D.







LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIEME.

CE Livre est le dernier de ceux des Elémens d'Euclide qui sont nécessaires. Les deux premières propositions suivent si naturellement la vingt-deuxième du sixième Livre, qu'il est surprenant qu'on ait pu les transporter ici. La troisième & la quatrième deviennent inutiles, parce qu'elles ne servent qu'à démontrer la cinquième ; & nous le faisons d'une manière différente de celle d'Euclide. Ainsi, nous les supprimons, & nous mettons à leur place les deux seules du treizième Livre qui soient utiles. Toutes les propositions qui suivent, depuis la cinquième jusqu'à la quinzième inclusivement, considèrent les pyramides, les cylindres

& les cônes. Nous supprimons aussi la seizième & la dix-septième, qui ne sont d'aucun usage. Mais, comme Euclide ne parle, ni de la solidité de la sphere, ni de sa surface, nous substituons à ces deux propositions, notre démonstration de cette solidité, & celle des démonstrations ordinaires de cette surface, qui nous paroît la plus simple. Enfin, la dix-huitième proposition, qui est la dernière d'Euclide, détermine les rapports que les spheres ont entr'elles.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

546 Les polygones semblables qui sont inscrits dans des cercles, sont entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.

Fig. 1. LES polygones semblables ACE^* & FHK , qui sont inscrits, l'un dans le cercle X , & l'autre dans le cercle Y , sont entr'eux ce que le quarré du diametre BL est au quarré du diametre GM .

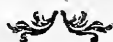
Const. Tirez des points B & L aux points D & C , les lignes droites BD &

LC ; & des points G & M aux points I & H , les lignes droites GI & MH.

Démonst. Puisque les polygones ACE & FHK sont semblables [H], l'angle BCD est égal à l'angle GHI , & les côtés BC & CD sont proportionnels aux côtés GH & HI (n). Ainsi , les triangles BCD & N. 400.
GHI sont équiangles (n) ; & par consé- N. 417.
quent , l'angle B D C est égal à l'angle GIH. Mais , puisque ces deux angles sont égaux , l'angle BLC qui est égal au premier , & l'angle GMH qui l'est au second (n) , sont aussi égaux (n). Donc , puisque N. 250.
les triangles BCL & GHM sont rectangles, N. 62.
l'un en C & l'autre en H (n) , ils sont aussi N. 263.
équiangles (n) ; & par conséquent , les N. 137.
quatre lignes BC , GH , BL & GM , sont
proportionnelles (n). N. 413.

Or , les polygones ACE & FHK sont des figures semblables & semblablement posées sur les deux premières [H] ; & les carrés des diamètres BL & GM sont aussi des figures semblables & semblablement posées sur les deux dernières (n). Donc , ces N. 400.
deux polygones sont entr'eux comme ces deux carrés (n). N. 445.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION II.

THÉORÈME.

547 *Les cercles sont entr'eux, comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 1. **L**E cercle X* est au cercle Y, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

Démonst. On peut supposer dans le cercle X, un polygone régulier d'un si grand nombre de côtés, que sa différence à ce cercle soit absolument insensible; & s'en imaginer aussi un pareil dans le cercle Y N. 408. (n). Or, puisque ces polygones seront semblables [s], ils seront entr'eux ce que le quarré du diametre BL est à celui du N. 546. diametre GM (n). Donc, puisque les cercles X & Y ne different point de ces mêmes polygones [s], ils sont aussi entre eux, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

548. Il suit de ce théorème, que les cercles sont entr'eux comme les polygones semblables qui y sont inscrits.

PROPOSITION III.

* THÉORÈME.

549. Une ligne droite qui est composée des côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre & inscrits chacun dans le même cercle, est divisée en moyenne & extrême raison.

LA ligne droite FD * dont les parties FE Fig. 2. & ED sont les côtés, l'une d'un exagone & l'autre d'un décagone, réguliers l'un & l'autre & inscrits chacun dans le même cercle, est divisée en moyenne & extrême raison au point E.

Const. Des points D & E, pris pour centres, & avec un rayon égal à la partie FE, décrivez deux arcs qui se coupent à un point G. De ce point, pris pour centre, & avec le même rayon, décrivez le cercle EDC. Enfin, tirez du même centre G aux points D, E & F, les lignes droites GD, GE & GF.

Démonst. L'angle EGD est de 36 degrés, puisqu'il a pour mesure l'arc DE (n), N. 37. qui est la dixième partie de la circonférence [H]. Ainsi, puisque le triangle DGE est isoscele [C], l'angle GED est de 72

- N. 84. degrés (n). Mais, cet angle qui est extérieur au triangle GEF, est double de l'angle F (n); puisque ce triangle est aussi isocèle [C]. Donc, l'angle F est aussi de 36 degrés. Par conséquent, puisque l'angle D est commun aux triangles GFD & DGE, N. 137. ces deux triangles sont équiangles (n).

Cr, puisque ces deux triangles sont N. 413. équiangles, $FD : GD :: GD : ED$ (n).

Donc, puisque les lignes FE & GD sont N. 61. égales [C], $FD : FE :: FE : ED$ (n).

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

550. Il suit de ce théorème, que si une ligne droite est divisée en moyenne & extrême raison, les deux segmens sont les côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle.



PROPOSITION IV.

* THÉORÈME.

551 *Le quarré du côté du pentagone régulier, est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le même cercle que ce pentagone.*

LE quarré du côté AB * du pentagone régulier ACE, est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le même cercle G que ce pentagone. Fig. 13.

Const. Divisez (n) l'arc AFB, en deux parties égales AF & FB; & l'arc FHB, aussi en deux parties égales FH & HB. Tirez ensuite, du centre G aux points A, F, H & B, les lignes droites GA, GF, GH & GB; & du point F aux points A, I & B, les lignes droites FA, FI & FB. N. 261.

Démonst. L'angle AGB est de 72 degrés, puisqu'il a pour mesure l'arc AFB (n), qui est la cinquieme partie de la circonférence [H]. Ainsi, puisque le triangle AGB est isoscele [C], l'angle GBA est de 54 degrés (n). Or, l'angle AGH est N. 37.
N. 84.

518 LES ELÉMENTS D'EUCLIDE.

aussi de 54 degrés, puisqu'il a aussi pour me-
 N. 37. sure l'arc AFH (n) qui est les trois quarts
 de l'arc AFB [C]. Donc, puisque l'angle
 GAB est commun aux triangles AGB &
 AIG, ces deux triangles sont équiangles
 N. 137. (n). Ainsi, $AB : AG :: AG : AI$ (n). Par
 N. 413. conséquent, le rectangle de AB & de AI
 N. 433. est égal au carré de AG (n).

Pareillement. Le rayon GH est perpen-
 N. 228. diculaire à la corde BF (n); puisqu'il la
 divise en deux parties égales [C]. Ainsi,
 la ligne FI est égale à la ligne IB; & par
 conséquent, le triangle BIF est isoscele.
 Or, le triangle AFB l'est aussi, puisque
 N. 260. les côtés AF & FB sont égaux (n). Donc,
 puisque l'angle IBF est commun à ces deux
 N. 137. triangles, ils sont équiangles (n). Ainsi,
 N. 413. $AB : FB :: FB : IB$ (n); & par consé-
 N. 433. quent (n), le rectangle de AB & de IB est
 égal au carré de FB.

Donc, la somme des rectangles faits,
 l'un du côté AB & de la partie AI, &
 l'autre du même côté AB & de la partie
 IB, est égale à celle des carrés des lignes
 AG & FB. Mais, cette première somme
 est la même chose que le carré du côté
 N. 182. AB (n); puisque les lignes AI & IB sont
 toutes les parties de ce côté: & les lignes
 AG & FB sont les côtés, l'une de l'exa-
 N. 310. gone régulier (n), & l'autre [C] du déca-

gone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le cercle G. Donc, le quarré du côté AB est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le cercle G.

Par conséquent, C. Q. F. D.

U S A G E.

552. On déduit de cette proposition, & du corollaire qui la précède, une solution du problème suivant, qui est beaucoup plus simple que celle que l'on a donnée au n^o 298.

Inscrire un pentagone régulier, dans un cercle donné CFD *.

Fig. 11.

CONST. Tirez un diametre CD, à volonté. Elevez du centre E (n) la perpendiculaire EF à ce diametre. Divisez le rayon CE, en deux parties égales CG & GE (n). Tirez du point G au point F, la ligne droite GF. Prenez sur le diametre CD, la partie GH égale à cette ligne GF. Enfin, tirez du point F au point H, la ligne droite FH. Cette ligne est égale au côté du pentagone demandé.

DÉMONST. La ligne CH est divisée en deux parties CE & EH, & le point G est le milieu de la partie CE [C]. Ainsi, le rectangle des lignes CH & EH, avec

le quarré de la partie GE , est égal au
 N. 190. quarré de la ligne GH (n). Par conséquent,
 il l'est aussi à celui de la ligne GF ; puisque
 les lignes GH & GF sont égales [c].

Mais, les quarrés des lignes GE & EF
 sont aussi égaux au quarré de la même ligne
 N. 171. GF (n). Donc, le rectangle précédent,
 avec le quarré de la ligne GE , est égal

N. 62. aux quarrés des lignes GE & EF (n).

Par conséquent, ce même rectangle est égal
 N. 64. au quarré de la ligne EF (n); ou, ce qui
 est la même chose, à celui de la ligne CE
 N. 35. (n).

N. 433. Ainsi, $CH.CE :: CE.EH$ (n). Donc,
 la ligne CH est divisée en moyenne & ex-

N. 402. trême raison au point E (n). Par consé-
 quent, puisque la partie CE est le côté de
 l'exagone régulier inscrit dans le cercle CFD

N. 310. (n), la partie EH est celui du décagone ré-

N. 550. gulier inscrit dans le même cercle (n).

Mais, la ligne EF est aussi le côté de ce
 N. 310. même exagone (n). Or, le quarré de la li-

gne FH est égal aux quarrés des lignes EF

N. 171. & EH (n). Donc, il est égal à ceux des
 côtés de l'exagone régulier & du décagone
 régulier, inscrits chacun dans le cercle CFD .

Par conséquent, cette ligne FH est égale au
 côté du pentagone régulier inscrit aussi dans

N. 551. le même cercle (n).

Donc, $C.Q.F.F.$

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

553. Deux pyramides qui ont le même point pour sommet , & chacune pour base l'une des deux parties d'un même parallélogramme divisé par sa diagonale, sont égales.

LES pyramides $AECB^*$ & $AECD$, qui Fig. 3. ont le même point A pour sommet , & les parties ECB & ECD du même parallélogramme BD pour bases, sont égales.

Const. Prenez sur la ligne AB un point F , à volonté. Faites ensuite passer par ce point , un plan FH parallèle à la base BD .

Démonst. Les plans FH & BD sont parallèles $[C]$. Ainsi , les lignes FG & BC qui sont les communes sections de ces plans & du plan BAC , sont parallèles (n) ; de même que les lignes IH & ED , N. 525. qui sont aussi les communes sections de ces mêmes plans & du plan EAD . Mais, les lignes BC & ED sont aussi parallèles ; puisque le quadrilatère BD est parallélogramme $[H]$. Donc , les lignes FG & IH sont parallèles (n) . N. 517.

Or , on démontre de la même manière , que les lignes FI & GH sont aussi parallèles. Donc , le quadrilatere FH est aussi parallélogramme. Par conséquent , les triangles IGF & IGH , qui sont les coupes des pyramides proposées , sont
N. 143. égaux (n).

Mais , la même démonstration subsiste , par quelque endroit du solide ABD que l'on fasse passer le plan FH. Donc , à quelque endroit que l'on coupe les pyramides AECB & AECD par un plan parallele à leurs bases , les sections sont égales. Par conséquent , ces pyramides le sont aussi.

Donc , C. Q. F. D.

PROPOSITION VII†.

THÉORÈME.

554. *Tout prisme triangulaire peut être divisé en trois pyramides égales.*

Fig. 4. **L**E prisme triangulaire ACE * peut être divisé en trois pyramides égales.

Const. Faites passer par les points A ,

† On a fait de la sixieme proposition , le quatrieme corollaire de celle-ci.

F & D , un plan AFD ; & par les points B , D & F , un plan BFD.

Démonst. Les pyramides F A B D & FAED ont le même point F pour sommet , & leurs bases sont les parties ABD & AED du même parallélogramme EB [c] ; ainsi , elles sont égales (n). Or, les N. 553. pyramides FABD & FBCD sont aussi égales (n) ; puisqu'elles ont le même point N. 553. D pour sommet , & que leurs bases sont les parties BAF & BCF du même parallélogramme AC [c]. Donc , les trois pyramides FABD , FAED & FBCD , sont égales (n).

N. 62.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

555. Il suit de ce théorème , qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle , & de même base.

La pyramide ABCD * est le tiers d'un Fig. 5. prisme de même hauteur qu'elle , & de même base.

Const. Supposez sur la base BCD , un prisme BM , qui soit de même hauteur que la pyramide proposée.

Démonst. La pyramide ABCD est une des trois pyramides égales en lesquelles

N. 554. on peut diviser le prisme BM (n). Donc , elle est le tiers de ce prisme.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

556. Il suit de ce corollaire , qu'une pyramide quelconque , est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle , & de même base.

Fig. 5. La pyramide , par exemple , EFHK * , est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle , & de même base.

Const. Supposez sur la base FHK , un prisme FS qui soit de même hauteur que la pyramide proposée. Faites ensuite passer par les points G , L & Q , un plan LQ ; par les points G , K & Q , un plan KQ ; & par les points G , I & Q , un plan IQ. Faites aussi passer par les points E , G & L , un plan EGL ; par les points E , G & K , un plan EGK ; enfin , par les points E , G & I , un plan EGI.

Démonst. Les pyramides triangulaires ELFG , ELGK , EKGI & EIGH , sont les tiers des prismes triangulaires OLFG , RLGK , NKGI & QIGH , chacune de N. 555. chacun (n). Donc , la pyramide EFHK , qui est la somme de toutes ces pyramides triangulaires , est aussi le tiers du prisme FS , qui est la somme de tous ces prismes triangulaires.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

557. Il suit de ce second corollaire, & des n^o 537 & 544, que *la solidité d'une pyramide quelconque, est égale au produit de la base de cette pyramide, multipliée par le tiers de sa hauteur.*

COROLLAIRE IV.

558. Il suit encore de ce second corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, sont entr'elles comme leurs bases.*

Les pyramides ABCD * & EFHK, Fig. 5. dont les hauteurs sont égales, sont entre elles ce que la base BCD est à la base FHK.

Const. Supposez sur les bases BCD & FHK, des prismes BM & FS qui soient de même hauteur que les pyramides proposées.

Démonst. Puisque les prismes BM & FS ont des hauteurs égales [C], ils sont entr'eux ce que la base BCD du premier est à la base FHK du second (n). Or, les N. 544. pyramides ABCD & EFHK sont les tiers, l'une du prisme BM, & l'autre du prisme FS (n). Donc, elles sont aussi entr'elles N. 556.

N. 359. ce que la base BCD est à la base FHK (n).
Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

559. Enfin, il suit de ce quatrième corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales & des bases égales, sont égales.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

560. *Les pyramides semblables sont entre elles en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils.*

Fig. 6. **L**ES pyramides semblables ABCD * & EFGH, sont entr'elles en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté BC au côté FG.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme quelconque BI, qui soit de même hauteur que la pyramide ABCD. Supposez aussi sur la base FGH, un prisme FK qui soit aussi de même hauteur que la pyramide EFGH; & équiangle au prisme BI.

Démonst. Les prismes BI & FK sont semblables; puisqu'ils sont équiangles,

& qu'ils ont les mêmes bases & les mêmes hauteurs que les pyramides ABCD & EFGH [C], qui sont semblables [H]. Ainsi, ces prismes sont entr'eux en rapport triplé de celui du côté BC au côté FG (n). N. 539.

Or, les pyramides ABCD & EFGH sont les tiers, l'une du prisme BI, & l'autre du prisme FK (n). Donc, elles sont N. 556.
aussi entr'elles en rapport triplé de celui du côté BC au côté FG (n). N. 359.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

561. *Les pyramides dont les solidités sont égales, ont leurs bases & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & celles dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, ont leurs solidités égales.*

P REMIÈREMENT. Si les pyramides ABCD * & EFGH sont égales, la base Fig. 7.
BCD de la première est à la base FGH de la seconde, ce que la hauteur de la seconde est à celle de la première.

Const. Supposez sur les bases BCD & FGH, des prismes BI & FK, dont les

hauteurs soient les mêmes que celles des pyramides proposées.

Démonst. Les prismes BI & FK sont triples, l'un de la pyramide ABCD, & N. 556. l'autre de la pyramide EFGH (n). Donc, N. 67. ils sont égaux (n), puisque ces pyramides sont égales [H]. Par conséquent, la base BCD du premier est à la base FGH du second, ce que la hauteur du second est à N. 541. celle du premier (n).

Mais, ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH [C]. Donc, la base BCD de la pyramide ABCD est à la base FGH de la pyramide EFGH, ce que la hauteur de cette dernière pyramide est à celle de la première.

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

Fig. 7. SECONDEMENT. Si la base BCD * de la première pyramide est à la base FGH de la seconde, ce que la hauteur de la seconde est à celle de la première, ces pyramides sont égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. La base BCD du prisme BI est à la base FGH du prisme FK, ce que la hauteur de ce dernier prisme est à celle du premier; puisque [C] ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides

pyramides ABCD & EFGH, qui sont réciproquement proportionnelles [H].
 Donc, ces prismes sont égaux (n). Par N. 541.
 conséquent, puisque les pyramides ABCD
 & EFGH sont les tiers de ces mêmes prismes (n), elles sont aussi égales (n). N. 556.
 N. 68.

Donc, C. Q. F. 2^o D.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

562. *Un cône est le tiers d'un cylindre de même hauteur que lui, & de même base.*

LE cône ABC * est le tiers du cylindre Fig. 8.
 AE, de même hauteur que lui & de même base.

Démonst. Une pyramide est terminée par autant de triangles, & un prisme est terminé par autant de parallélogrammes, que le polygone qui sert de base à l'une ou à l'autre, a de côtés. Ainsi, si conformément à ce qui a été dit au n^o 408, on considère le cercle AC comme étant un polygone d'un si grand nombre de côtés, que, même en rigueur, ce polygone ne diffère plus de ce cercle; alors, le cône ABC & le cylindre AE deviennent, l'un

Z

une pyramide & l'autre un prisme , qui ayant l'une & l'autre autant de faces que ce même polygone auroit de côtés , ne different point non plus , l'une de ce même cône , ni l'autre de ce même cylindre.

Or , une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle ,
 N. 556. & de même base (n). Donc , puisque le cône ABC & le cylindre AE ont chacun & la même hauteur & la même base [H] , ce cône est aussi le tiers de ce cylindre.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

563. Il suit de ce théorème & de sa démonstration , que *la solidité d'un cylindre est égale au produit de la base de ce cylindre , multipliée par sa hauteur*. Par conséquent , *la solidité d'un cône est égale au produit de la base de ce cône , multipliée par le tiers de sa hauteur*.



PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

564. *Les cylindres dont les hauteurs sont égales , sont entr'eux comme leurs bases : & il en est de même des cônes , lorsqu'ils sont dans le même cas.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que l'on vient de démontrer dans la proposition précédente , les cylindres peuvent être pris pour des prismes , & les cônes , pour des pyramides. Or , les prismes qui ont des hauteurs égales , sont entr'eux comme leurs bases (n) ; N. 538. & il en est de même des pyramides (n). N. 558.— Donc , lorsque les cylindres , ou les cônes , ont des hauteurs égales , ils sont aussi entr'eux comme leurs bases.

Par conséquent , C. Q. F. D.



PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

565. *Les cylindres semblables sont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils, (par exemple), de ceux des diametres de leurs bases : & il en est de même des cônes semblables.*

DÉMONSTRATION.

LES cylindres peuvent être pris pour des prismes ; & les cônes , pour des pyramides (n). Or , les prismes semblables sont entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils (n) ; & il en est de même des pyramides semblables (n). Donc, lorsque les cylindres , ou les cônes , sont semblables , ils sont aussi entr'eux en rapport triplé de celui de leurs côtés pareils ; & par conséquent , de celui des diametres de leurs bases ; puisque ces diametres sont des côtés pareils de ces solides.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

566. Si un cylindre est coupé par un plan parallèle à sa base, les segmens du cylindre sont entr'eux comme les segmens de l'axe.

SI le plan EF^* , qui coupe le cylindre Fig. 9. AC , est parallèle à la base DC , les segmens AF & EC du cylindre, sont entr'eux comme les segmens HI & IG de l'axe HG .

Const. Divisez le plus petit segment HI , en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en deux parties égales HM & MI . Prenez ensuite sur le segment IG , une partie GK égale à la partie HM . Enfin, faites passer par les points M & K , des plans NO & PQ parallèles chacun à la base DC .

Démonst. Les segmens AO , NF & PC , sont égaux (n). Ainsi, l'on démon- N. 564. tre cette proposition, de la même manière dont on a démontré la première du sixième Livre, n° 405.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

567. *Les cylindres dont les bases sont égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs : & il en est de même des cônes, lorsqu'ils sont dans le même cas.*

Fig. 10. **P**REMIÈREMENT. Les cylindres NB* & HF dont les bases NO & HG sont égales, sont entr'eux, ce que la hauteur KP du premier est à la hauteur ML du dernier.

Const. Prolongez le cylindre NB, jusqu'à ce que la hauteur PI du prolongement NC, soit égale à la hauteur ML du cylindre HF.

Démonst. Les cylindres HF & NC sont N. 564. égaux (n) ; puisque [C] ils ont des hauteurs égales ML & PI, & des bases égales HG & DC. Or, les cylindres NB & NC sont entr'eux, ce que la hauteur KP est à la N. 566. hauteur PI (n) ; puisque ces cylindres sont les segmens du cylindre AC [C]. Donc, les cylindres NB & HF sont aussi entr'eux, ce que la hauteur KP est à la hauteur PI, N. 61. ou ML (n).

Par conséquent, C. Q. F. 1^o D.

SECONDEMENT. Les cônes NKO * & Fig. 10.
HMG dont les bases NO & HG sont égales, sont entr'eux, ce que la hauteur KP du premier est à la hauteur ML du dernier.

Const. Supposez sur les bases NO & HG, les cylindres NB & HF, qui aient les mêmes hauteurs que les cônes proposés.

Démonst. Les cylindres NB & HF sont entr'eux, ce que la hauteur KP est à la hauteur ML [D]; puisque les bases NO & HG sont égales [H]. Or, les cônes NKO & HMG sont les tiers de ces cylindres, chacun de chacun (n). Donc, ils sont N. 562. aussi entr'eux comme ces mêmes hauteurs (n).

N. 359.

Par conséquent, C. Q. F. 2^o D.



PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

568. *Les cylindres, & de même les cônes, dont les solidités sont égales, ont leurs bases & leurs hauteurs réciproquement proportionnelles : & ceux dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, ont leurs solidités égales.*

DÉMONSTRATION.

LES cylindres peuvent être pris pour des prismes ; & les cônes pour des pyramides (n). Ainsi, ce que l'on a démontré des prismes au n° 541, & des pyramides au n° 561, convient pareillement, l'un aux cylindres, & l'autre aux cônes.

Par conséquent, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

569. *La solidité d'une demi-sphere , est les deux tiers de celle du cylindre dans lequel cette demi-sphere est inscrite.*

LA demi-sphere ALB * est les deux tiers Fig. 27.
du cylindre AK dans lequel elle est inscrite.

Const. Faites passer par l'axe HL , un plan quelconque AIKB. Prenez ensuite sur ce même axe un point n , à volonté ; & faites aussi passer par ce point , un plan Qs M parallele à la base IRK. Enfin , tirez du centre H , au point o auquel la commune section QM de ces plans rencontre la surface de la demi-sphere , & aux extrémités I & K de la commune section du plan AIKB & de la base IRK , les lignes droites Ho , HI & HK.

Démonst. Le triangle onH est rectangle en n (n). Ainsi , le cercle qui a pour N. 527. rayon la ligne Ho , est égal aux cercles dont les lignes no & nH sont les rayons (n). Mais , les lignes nQ & Ho sont N. 459. égales ; puisque la même ligne AH est

Z v

- N. 143. égale à l'une (n) & à l'autre (n) : & les
 N. 488. lignes np & nH sont aussi égales (n) ;
 N. 413. puisque le triangle Hnp est équiangle au
 N. 137. triangle isoscele HLK (n). Donc , le
 cercle qui a pour rayon la ligne nQ , est
 égal aux cercles dont les lignes no & np
 N. 61. sont les rayons (n). Par conséquent , puis-
 que ces trois cercles sont les sections , l'un
 du cylindre AK , l'autre de la demi-sphere
 ALB , & le dernier , du cône IHK , la
 section de ce cylindre est égale à celles
 de cette demi-sphere & de ce cône.

Or , la même démonstration subsiste ,
 par quelque endroit du cylindre AK que
 l'on fasse passer le plan QsM . Donc , à
 quelque endroit que l'on coupe ce cylin-
 dre par un plan parallele à sa base , sa sec-
 tion est égale à celles de la demi-sphere
 ALB & du cône IHK . Ainsi , cette demi-
 sphere & ce cône valent ensemble ce cy-
 lindre. Par conséquent , puisque ce même
 N. 362. cône est le tiers de ce même cylindre (n) ,
 cette demi-sphere en est les deux tiers.

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

570. Il suit de ce théorème , qu'une
*sphere est les deux tiers du cylindre dans
 lequel elle est inscrite.*

COROLLAIRE II.

571. Il suit de ce corollaire, que *la solidité d'une sphere, est égale au produit de la surface de l'un quelconque de ses grands cercles, multipliée par les deux tiers de son diametre.*

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

572. *Chaque grand cercle d'une sphere, est égal au quart de la surface de cette même sphere.*

DÉMONSTRATION.

ON peut considérer une sphere comme étant divisée en un grand nombre de petits solides, qui aient chacun leur sommet au centre de cette sphere, & leur base dans sa surface. Or, si l'on suppose dans une même sphere un si grand nombre de ces solides, que la convexité de la base de chacun devienne absolument insensible, ils seront autant de petites pyramides qui auront chacune le rayon de cette sphere pour hauteur. Mais, pour avoir la solidité

de chacune de ces pyramides en particulier, il faut multiplier sa base par le tiers de ce rayon (n). Donc, pour avoir la solidité de toutes ensemble, qui est celle de la sphere même, il faut multiplier par le tiers de ce même rayon, la somme de toutes les bases; c'est-à-dire, la surface même de la sphere.

Mais, puisque [D] l'on a la solidité d'une sphere, en multipliant sa surface par le tiers de son rayon; on aura de même sa solidité, en multipliant le quart de cette même surface par le quadruple du tiers de ce même rayon; c'est-à-dire, par les deux tiers du diametre.

Or, on a aussi la même solidité, en multipliant l'un des grands cercles de cette même sphere par les deux tiers du même diametre (n). Donc, ce grand cercle, & le quart de la surface de la sphere, sont deux surfaces égales.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

573. Il suit de ce théorème, que *la surface d'une sphere, est quadruple de celle de l'un quelconque des grands cercles de cette même sphere.*

COROLLAIRE II.

574. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'une sphere, est égale à celle du cylindre dans lequel cette même sphere est inscrite.*

Démonst. La surface d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base, multipliée par sa hauteur. Or, le cylindre dans lequel une sphere est inscrite, a l'un des grands cercles de cette sphere pour base, & le diametre de ce même cercle pour-hauteur (n). Ainsi, sa N. 61. surface est égale au produit de la circonférence de l'un de ces grands cercles, multipliée par son diametre.

Mais, la surface de ce grand cercle est égale au produit de cette même circonférence multipliée seulement par le quart de ce même diametre (n). Donc, la surface N. 409. de ce cylindre est quadruple de celle de ce grand cercle. Par conséquent, puisque la surface de la sphere en est aussi quadruple (n), la surface de ce cylindre & celle N. 573. de cette sphere sont égales (n). N. 67.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

575. *Les sphères sont entr'elles en rapport triplé de celui de leurs diamètres.*

DÉMONSTRATION.

LES sphères sont les deux tiers des cy-
 N. 569. lindres dans lesquels elles sont inscrites (n).
 Ainsi, elles ont entr'elles les mêmes rap-
 N. 359. ports que ces cylindres (n). Or, ces cy-
 N. 499. lindres sont semblables (n); & par consé-
 N. 565. quent, ils sont entr'eux en rapport triplé
 de celui de leurs axes (n). Donc, les
 sphères sont aussi entr'elles en rapport tri-
 plé de celui des axes des cylindres dans
 lesquels elles sont inscrites. Par consé-
 quent, puisque ces axes sont les diamètres
 de ces mêmes sphères, elles sont entre-
 elles en rapport triplé de celui de leurs
 diamètres.

Donc, C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX.

** THÉORÈME.

576. *La solidité d'un Tétrasphéroïde † est les deux tiers de celle du parallélépipède dans lequel il est inscrit.*

TOUT tétrasphéroïde est les deux tiers du parallélépipède dans lequel il est inscrit.

Const. Tirez une ligne droite AD, à volonté. (Livre 6, fig. 46.) Décrivez sur cette ligne un demi-cercle AMD. Circonscrivez à ce demi-cercle un rectangle AC. Tirez du centre N aux points B & C, les lignes droites NB & NC. Elevez du même centre N (n), la perpendiculaire NM à la ligne AD. Enfin, des points G & O pris à volonté sur le côté AB, tirez (n) les parallèles GH & OP à la même ligne AD. N. 95.
N. 133.

Démonst. Si l'on imagine que le parallélépipède circonscrit à un tétrasphéroïde soit coupé par trois plans, dont le

† Je donne le nom de *Tétrasphéroïde* à un solide qui a pour base le carré du diamètre d'un cercle; & dont toutes les sections parallèles à cette base sont les carrés des cordes de ce même cercle.

premier passe par l'axe MN de ce tétrasphéroïde, & dont les deux autres soient parallèles à la base de ce parallélépipède, on aura le rectangle AC pour la section de ce même parallélépipède; le demi-cercle AMD, pour celle de ce tétrasphéroïde; & le triangle BNC, pour celle d'une pyramide qui seroit inscrite dans ce même parallélépipède. Les lignes droites GH & OP seront les communes sections de ces trois plans. Cela posé :

La ligne EH est divisée en deux parties au point F, & le point L est le milieu de sa partie EF (n). Ainsi, le rectangle de cette ligne & de sa partie FH, avec le carré de la partie LF, est égal au carré de la ligne LH (n). Or, ce rectangle est égal au carré de la tangente HD (n); & le carré de cette tangente l'est à celui de la ligne LK: car, puisque le triangle NLK est équiangle au triangle NMC qui est isoscele [c], la ligne LK est égale à la ligne LN (n); & cette dernière ligne l'est à la tangente HD (n). Donc, le carré de la ligne LK, avec celui de la ligne LF, est égal au carré de la ligne LH.

Mais, ces trois lignes LK, LF & LH ne sont que les moitiés des trois lignes IK, EF & GH, chacune de chacune [c].

Donc , les quarrés de ces trois dernieres lignes font quadruples de ceux des trois premieres , chacun de chacun (n). Par N. 185. conséquent , le quarré de la ligne IK , avec celui de la ligne EF , est égal à celui de la ligne GH.

Or , le quarré de la ligne IK , est la section de la pyramide BNC † ; celui de la ligne EF , est la section du tétrasphéroïde AMD ; & celui de la ligne GH , est la section du parallélépipede AC. Donc , la section de la pyramide BNC , avec celle du tétrasphéroïde AMD , est égale à la section du parallélépipede AC.

Enfin , la même démonstration subsiste , par quelque endroit du parallélépipede AC que passe un plan GH parallele à sa base AD. Donc , la pyramide BNC , avec le tétrasphéroïde AMD , est égale au parallélépipede circonscrit AC. Par conséquent , puisque cette pyramide est le tiers de ce parallélépipede (n) , ce tétrasphéroïde en est les deux tiers. N. 556.

Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

577. Il suit de la démonstration de ce

† Pour éviter une figure trop compliquée , nous indiquons par leurs sections la pyramide , le tétrasphéroïde & le parallélépipede.

Fig. 46, théorème, premièrement, que la solidité
 Livre 6. d'une partie $AEFD^*$ d'un tétrasphéroïde
 AMD , comprise entre sa base & le quarré
 de EF parallele à cette base, avec la solidité
 d'une pyramide INK , dont le côté IK du
 quarré de la base est double de l'axe LN , est
 égale à la solidité du parallélépipede cor-
 respondant $AGHD$.

Secondement, que la solidité d'une
 partie $EQRF$ d'un tétrasphéroïde AMD ,
 comprise entre les quarrés de EF & de QR
 paralleles à sa base, avec la solidité d'une
 pyramide tronquée $ISTK$, dont les côtés IK
 & ST des quarrés des deux bases sont dou-
 bles des axes LN & VN des pyramides en-
 tieres INK & SNT , chacun de chacun, est
 égale à la solidité du parallélépipede cor-
 respondant $GOPH$.

Troisièmement enfin, que la solidité
 d'une partie QMR d'un tétrasphéroïde
 AMD , comprise entre son sommet M & le
 quarré de QR parallele à la base, avec la
 solidité d'une pyramide tronquée $SBCT$,
 dont les côtés ST & BC des quarrés des
 deux bases sont doubles des axes VN &
 MN des pyramides entieres SNT & BNC ,
 chacun de chacun, est égale à la solidité du
 parallélépipede correspondant $OBCP$.

Donc, $C. Q. F. D.$

SCHOLIE.

578. Puisque les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres (n), N. 547. tout ce que l'on vient de démontrer du tétra-sphéroïde convient pareillement à la sphere.

Ainsi, dans la même fig. 46 du Livre 6, si l'on prend le rectangle AC pour la section d'un cylindre dans lequel une demi-sphere seroit inscrite; le demi-cercle AMD pour la section de cette demi-sphere; & le triangle BNC pour celle d'un cône inscrit dans ce même cylindre; on verra, par une démonstration pareille à celle du théorème précédent, premièrement, que la solidité d'une demi-sphere AMD, avec celle d'un cône BNC, dont l'axe MN & le rayon MC du cercle de la base sont égaux, est égale à celle du cylindre circonscrit AC. Par conséquent, une sphere est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.

Secondement, que la solidité d'un segment de sphere AEFD, compris entre un grand cercle & un petit cercle dont les lignes ND & LF sont les rayons, avec celle d'un cône INK dont l'axe LN & le rayon LK du cercle de la base sont égaux, est égale à celle du cylindre correspondant AGHD.

Troisièmement, que la solidité d'un segment de sphere EQRF, compris entre deux petits cercles dont les lignes LF & VR sont les rayons, avec celle d'un cône tronqué ISTK, compris entre les deux cercles dont les rayons LK & VT sont égaux aux axes LN & VN des cônes entiers INK & SNT, chacun à chacun, est égale à celle du cylindre correspondant GOPH.

Quatrièmement enfin, que la solidité d'une calotte QMR, avec celle d'un cône tronqué SBCT, compris entre le petit cercle & le grand cercle dont les rayons VT & MC sont égaux aux axes VN & MN des cônes entiers SNT & BNC, est égale à celle du cylindre correspondant OBCP.

Fin des Elémens d'Euclide.

DES PROPORTIONS

ARITHMÉTIQUES †.

DÉFINITIONS.

579. **O**N dit que des rapports arithmétiques sont égaux, ou sont les mêmes; lorsque les différences de leurs termes sont égales.

Par exemple, le rapport arithmétique d'une ligne de 12 pieds à une ligne de 15 pieds, est égal à celui d'une ligne de 18 pieds à une ligne de 21 pieds; parce que la différence 3 de 12 à 15, est la même que celle de 18 à 21.

Pareillement, le rapport arithmétique d'une ligne de 6 pieds à une ligne de 4 pieds, est égal à celui d'une ligne de 11 pieds à une ligne de 9 pieds; parce que la différence 0—2 de 6 à 4 (n), est la même N. 316. que celle de 11 à 9.

SCHOLIE.

580. Pour marquer que des rapports arithmétiques sont égaux, tels que le sont, par

† Euclide n'a rien dit des proportions arithmétiques

550 DES PROPORTIONS

exemple ceux de 5 à 11, de 14 à 20, de 27 à 33, &c., on les sépare les uns des autres par trois points rangés en triangle, de cette manière, $5 \cdot 11 \therefore 14 \cdot 20 \therefore 27 \cdot 33 \therefore \&c.$

Et pour exprimer cette égalité, on dit, que 5 sont arithmétiquement à 11, ce que 14 sont à 20, ce que 27 sont à 33, &c.

Mais, lorsque la proportion arithmétique est continue, telle que l'est, par exemple celle-ci, $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \&c.$, on la fait précéder par une petite ligne entre trois points, de cette manière, $\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \&c.$

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

581. Si quatre quantités sont en proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyennes.

SI $a \cdot b \therefore c \cdot d$, la somme $a + d$ des extrêmes, est égale à la somme $b + c$ des moyennes.

Démonst. Puisque [H], $a \cdot b \therefore c \cdot d$, si b est égal à a , c l'est à d (n). Ainsi, a fait avec d , la même somme que b avec c .

Et si au contraire b surpasse a , ou en

differe d'une certaine quantité , alors (n), N. 579. c differe de d , ou le surpasse , de la même quantité. Ainsi , a fait toujours avec d la même somme que b avec c . Donc , $a + d$ est toujours égal à $b + c$.

Par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

582. Il suit de ce théorème , premièrement , que *pour trouver le quatrieme terme d'une proportion arithmétique dont les trois premiers termes sont donnés ; il faut de la somme des moyens soustraire le premier terme. Le reste est le quatrieme terme demandé.*

Secondement , que *si trois quantités sont en progression arithmétique , la somme des extrêmes est le double du terme moyen.*



PROPOSITION II.

THÉORÈME.

583. Si quatre quantités sont telles que la somme des extrêmes soit égale à celle des moyennes ; ces quatre quantités sont en proportion arithmétique,

SI les quantités a, b, c & d , sont telles que la somme $a + d$ des extrêmes, soit égale à la somme $b + c$ des moyennes, le rapport arithmétique de a à b , est le même que celui de c à d .

Démonst. Puisque [H], a fait avec d la même somme que b fait avec c , si b est N. 579. égal à a , c l'est à d . Ainsi, $a . b :: c . d$ (n).

Mais si b surpasse a , ou en diffère, d'une certaine quantité, il faut alors que c diffère de d , ou le surpasse, de la même quantité ; puisque autrement, b ne feroit plus avec c la même somme que a fait avec d . Donc, la différence de a à b est la même que celle de c à d . Par conséquent, $a . b ::$ N. 579. $c . d$ (n).

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

584. Il suit de ce théorème, que si
trois

trois quantités sont telles que la somme des extrêmes soit double de la quantité moyenne, ces trois quantités sont en progression arithmétique.

Par conséquent, la moitié de la somme de deux quantités quelconques, est moyenne proportionnelle arithmétique entre ces deux quantités.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

585. Dans une progression arithmétique, le second terme est égal au premier, plus une fois la différence qui regne dans cette progression : le troisième terme est égal au premier, plus deux fois cette différence : le quatrième terme est égal au premier, plus trois fois cette même différence : & ainsi de suite.

DANS cette progression, $\div a . b . c . d . e . f . g . \&c .$, le second terme b est égal au premier terme a , plus une fois la différence : le troisième terme c est égal au premier terme a , plus deux fois la différence : le quatrième terme d est égal au premier terme a , plus trois fois la différence : & ainsi de suite.

La progression dont il s'agit est croissante, ou décroissante; c'est-à-dire que la différence qui y regne est positive, ou négative.

Premièrement. Lorsque la différence est positive.

Démonst. Puisque la différence est positive [H], a est plus petit que b d'une certaine quantité x . Ainsi, en ajoutant à a cette quantité x dont il diffère de b , la somme $a + x$ est égale à b . Par conséquent, on peut mettre cette somme à la place du second terme b .

De même, en ajoutant à b , c'est-à-dire à $a + x$, la même quantité x dont il diffère de c , la somme $a + 2x$ est égale à c . Ainsi, l'on peut mettre cette somme à la place du troisième terme c .

Pareillement, en ajoutant à c , c'est-à-dire à $a + 2x$, cette même quantité x dont il diffère de d , la somme $a + 3x$ est égale à d . Ainsi, on peut la mettre à la place du quatrième terme d . Et ainsi de suite.

Donc, cette même progression $\div a . b . c . d . e . f . g . \&c.$ peut être exprimée de la manière suivante, $\div a . a + x . a + 2x . a + 3x . a + 4x . a + 5x . \&c.$

Or, $a + x$ est le premier terme a , plus une fois la différence x : $a + 2x$ est le premier terme a , plus deux fois la différence x : $\&c.$

Secondement. Lorsque la différence est négative.

Démonst. Puisque la différence est négative [H], a est plus grand que b d'une certaine quantité x . Ainsi, en soustrayant de a cette quantité x dont il surpasse b , le reste $a - x$ est égal à b . Par conséquent, on peut mettre ce reste à la place du second terme b .

De même, en soustrayant de b , c'est-à-dire de $a - x$, la même quantité x dont il surpasse c , le reste $a - 2x$ est égal à c . Ainsi, l'on peut mettre ce reste à la place du troisième terme c .

Pareillement, en soustrayant de c , c'est-à-dire de $a - 2x$, cette même quantité x dont il surpasse d , le reste $a - 3x$ est égal à d . Ainsi, on peut le mettre à la place du quatrième terme d . Et ainsi de suite.

Donc, cette même progression, $\div a . b . c . d . e . f . g . \&c.$ peut être exprimée de la manière suivante, $\div a . a - x . a - 2x . a - 3x . a - 4x . a - 5x . \&c.$

Or, $a - x$ est le premier terme a , plus une fois la différence négative x : $a - 2x$ est le premier terme a , plus deux fois la différence négative x : &c.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

586. Dans une progression arithmétique, la somme de tous les termes est égale au produit de celle des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

LA somme $a + b + c + \&c.$ de tous les termes de cette progression, $\div a . b . c . d . e . f . g . h . i . k$. qui a 10 termes, est égale au produit $5a + 5k$ de la somme des extrêmes a & k , multipliée par la moitié 5 du nombre des termes.

Démonst. Dans une progression arithmétique, la différence de chaque terme à celui qui le suit immédiatement, est toujours la même (n). Ainsi, puisque la progression dont il s'agit a 10 termes, elle donne ces quatre proportions $a . b :: i . k$, $b . c :: h . i$, $c . d :: g . h$ & $d . e :: f . g$.
 N. 579. Donc (n), $a + k$ est égal à $b + i$, $b + i$ l'est à $c + h$, $c + h$ l'est à $d + g$, & $d + g$ l'est à $e + f$. Par conséquent, ces cinq sommes $a + k$, $b + i$, $c + h$, $d + g$ &
 N. 581. $e + f$, sont cinq quantités égales (n).
 N. 62. Mais, puisque ces cinq quantités sont égales, elles sont chacune la cinquième

partie de leur somme. Ainsi, leur somme est également $5a + 5k$, comme $5b + 5i$, comme, &c. Donc, &c.

Or, quel que soit le nombre des termes d'une progression arithmétique, on démontrera toujours la même propriété, par un pareil raisonnement.

Donc, C. Q. F. D.

USAGES

des Progressions arithmétiques.

QUESTION. Iere.

587. *Un Seigneur voulant faire construire un mur autour de son parc, on n'en fit que 5 toises la premiere semaine. Mais le nombre des travailleurs étant successivement augmenté, on fait chaque semaine suivante 8 toises de plus que la semaine précédente. Combien de toises fera-t-on la 27^e semaine ? & combien y en aura-t-il de faites à la fin de la 26^e semaine ?*

SOLUTION. Le premier des deux nombres demandés, est le 27^e terme d'une progression arithmétique qui a 5 pour premier terme, & 8 pour différence. Or (n), ce 27^e terme est égal au premier terme 5, plus 26 fois la différence 8. Ainsi, l'on multiplie 8 par 26 ; on ajoute ensuite 5 au pro-

N. 585.

558 DES PROPORTIONS

duit 208 ; & la somme 213 est le premier nombre demandé.

Le second des deux mêmes nombres demandés, est la somme de tous les termes d'une progression arithmétique qui a 5 pour premier terme, 8 pour différence, & 26
 N. 586. pour nombre des termes. Or (n), cette somme est égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la moitié 13 du nombre des termes. Ainsi, l'on cherche
 N. 585. (n) le 26^e terme 205 ; on lui ajoute 5 ; on multiplie ensuite par 13 la somme 210 ; & le produit 2730 est le second nombre demandé.

Donc , C. Q. F. F.

QUESTION II.

588. *Il faut distribuer 12000 livres à 20 personnes ; de maniere que la seconde ait 12 liv. de plus que la premiere ; la troisieme, 12 liv. de plus que la seconde ; & ainsi de suite. Combien faut-il donner à la premiere ; & à chacune des autres ?*

SOLUTION. Le premier des nombres demandés est le premier terme d'une progression arithmétique dont 12000 sont la somme de tous les termes, 20 le nombre
 N. 586. des termes, & 12 la différence. Or (n), cette somme 12000 est égale au produit de celle des extrêmes, multipliée par la

moitié 10 du nombre des termes. Ainsi, l'on divise 12000 par 10, & le quotient 1200 est la somme des extrêmes.

Mais (n), cette somme 1200 est égale N. 585. à deux fois le premier terme, plus 19 fois la différence 12. Donc, après avoir multiplié 12 par 19, on soustrait de 1200 le produit 228; & la moitié 486 du reste, est le premier des nombres demandés.

A l'égard des autres nombres demandés, ils sont les termes d'une progression arithmétique qui a 486 pour premier terme, & 12 pour différence. Ainsi (n), on ajoute N. 585. 12 au premier terme, & la somme 498 est le second terme: on ajoute ensuite 12 au second terme, & la somme 510 est le troisième terme. Et ainsi de suite, pour trouver les autres termes.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION III.

589. On a fait creuser un puits de 18 pieds de profondeur. L'ouvrier qui a commencé le travail l'a quitté après en avoir fait 10 pieds. Ainsi, un autre a creusé les 8 pieds qui restoit à faire. L'ouvrage étant fini, on l'a estimé 150 livres. Quelle part de cette somme chaque ouvrier doit-il avoir?

SOLUTION. La peine de remuer la terre a été la même pour le premier ouvrier

comme pour le second. Mais , à mesure que l'endroit d'où l'on a enlevé les terres est devenu plus profond , on a été obligé de les monter de plus bas. Si pour enlever les terres du premier pied de profondeur on a descendu de 1 pied , & remonté par conséquent de 1 pied ; pour enlever les terres du second pied de profondeur , il a fallu descendre de 2 pieds , & remonter par conséquent de 2 pieds ; & ainsi de suite. Donc , les différens espaces que l'on a parcourus pour faire ces enlevemens , forment une progression arithmétique qui a 2 pour premier terme, 2 aussi pour différence , & 18 pour nombre des termes.

- N. 336. Ainsi , l'on cherche (n) la somme 342 de tous les termes ; & la somme 110 des 10 premiers. On cherche ensuite (n) le quatrieme terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes sont 342 , 110 & 150 ; & l'on trouve 48^{th} 4^{th} $10^{\frac{1}{19}}$ & pour la part du premier ouvrier. Par conséquent , celle du second doit être 101^{th} 15^{th} $1^{\frac{1}{19}}$ &.

Donc , C. Q. F. F.

QUESTION IV.

590. On a payé en progression arithmétique 15000 liv. à un certain nombre de personnes. La première a reçu pour sa part

408 livres , & la dernière 792 livres. Quel est le nombre de ces personnes ? & de combien chaque paiement a-t-il augmenté ?

SOLUTION. Le premier des deux nombres demandés , est celui des termes d'une progression arithmétique dont 15000 font la somme de tous les termes ; & dont 408 & 792 font les extrêmes. Or (n) , cette N. 586. somme 15000 est égale au produit de celle des extrêmes , multipliée par la moitié du nombre des termes. Ainsi , l'on divise 15000 par la somme 1200 de ces deux extrêmes ; & le quotient $12\frac{1}{2}$ est la moitié du nombre des termes. Par conséquent , 25 font le premier nombre demandé.

Le second des deux mêmes nombres demandés , est la différence d'une progression arithmétique dont 408 font le premier terme , 792 le dernier , & 25 le nombre des termes. Or (n) , ce dernier terme 792 est N. 585. égal au premier terme 408 , plus 24 fois la différence. Ainsi , après avoir soustrait 408 de 792 , on divise par 24 le reste 384 ; & le quotient 16 est le second nombre demandé.

Donc , C. Q. F. F.

QUESTION V.

591. Une Compagnie est assise à 6 toises de distance du bout d'une allée dont les ar-

bres sont éloignés de 3 toises, chacun de chacun. Un jeune homme de cette même Compagnie parie 100 louis qu'en moins de deux heures, il les portera tous l'un après l'autre au pied de chaque arbre. Devoit-il faire ce pari ?

SOLUTION. Puisque l'endroit d'où il faudroit porter les louis est éloigné de 6 toises du bout de l'allée, le parieur parcourroit 6 toises pour porter le premier louis au pied du premier arbre, & les 6 mêmes toises pour venir prendre le second louis. Ainsi, il auroit 12 toises à parcourir pour le premier louis.

Pour porter le second louis à 3 toises plus loin que le premier, il faudroit parcourir 9 toises, & les 9 mêmes toises pour venir prendre le troisieme louis. Ainsi, le parieur auroit 18 toises à parcourir pour le second louis. Ce qui feroit 6 toises de plus que pour le premier.

Par la même raison, pour porter le troisieme louis & venir prendre le quatrieme, il faudroit parcourir 6 toises de plus que pour le second. Et ainsi de suite.

La question se réduit donc à trouver la somme de tous les termes d'une progression arithmétique qui auroit 12 pour premier terme, 6 pour différence, & 100 pour nombre des termes.

Ainsi , l'on commence par chercher (n) N. 585.
le centieme terme 606 ; & on lui ajoute
12. On multiplie ensuite la somme 618
par la moitié 50 du nombre des termes. Le
produit 30900 est (n) la somme deman- N. 586.
dée ; & par conséquent , le nombre des
toises qu'il auroit fallu parcourir pour ga-
gner les 100 louis du pari.

Or , 30900 toises font presque 15 lieues
de 2500 pas chacune ; ou 13 lieues &
demie , de 2287 toises chacune.

Donc, C. Q. F. F.

QUESTION VI.

592. *On a prêté 100 louis à un particu-
lier , aux conditions que dans 15 jours il
rendroit 1 louis ; que 15 jours après il ren-
droit 3 louis ; que 15 autres jours après , il
rendroit 5 louis ; & ainsi de suite. En com-
bien de quinzaines rendra-t-il les 100 louis?*

SOLUTION. Le nombre demandé est
celui des termes d'une progression arithmé-
tique qui a 100 pour somme de tous ses
termes , 1 pour premier terme , & 2 pour
différence. Or (n) , cette somme 100 est N. 586.
égale au produit de celle des extrêmes ,
multipliée par la moitié du nombre des ter-
mes. Mais , on ne connoît ni cette somme
des extrêmes , ni cette moitié du nombre
des termes ,

564 DES PROPORTIONS ARITH.

Dans cette circonstance , on représente par une lettre quelconque , par exemple par la lettre x , le nombre des termes demandé.

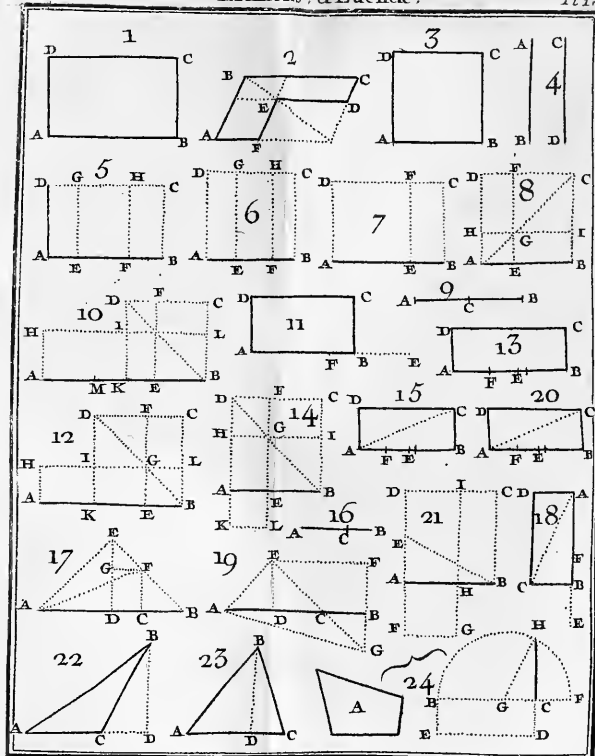
Or , si la lettre x représente le nombre des termes , $x-1$ représentera le quantième du terme qui précède le dernier. Ainsi , après avoir multiplié par $x-1$ la différence 2 , on ajoute le premier terme 1 au produit $2x-2$; & la somme $2x-1$ représente le dernier terme (n). A ce dernier terme $2x-1$ on ajoute le premier terme 1 , & la somme $2x$ représente la somme des extrêmes. Enfin , on multiplie cette somme $2x$ par $\frac{x}{2}$ qui représente la moitié du nom-

bre des termes ; & le produit $\frac{2xx}{2}$, c'est-à-

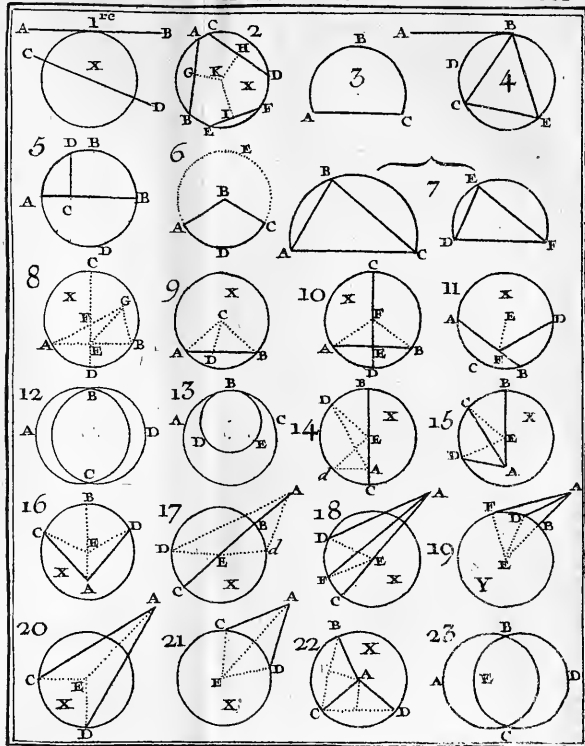
N. 586. dire xx , représente la somme 100 de tous les termes (n). Or , xx indique le produit de x multiplié par lui-même. Donc , 100 sont le produit du nombre des termes multiplié aussi par lui-même. Par conséquent , la racine quarrée 10 du nombre 100 , est celui des quinzaines demandé.

Donc , C. Q. F. F.

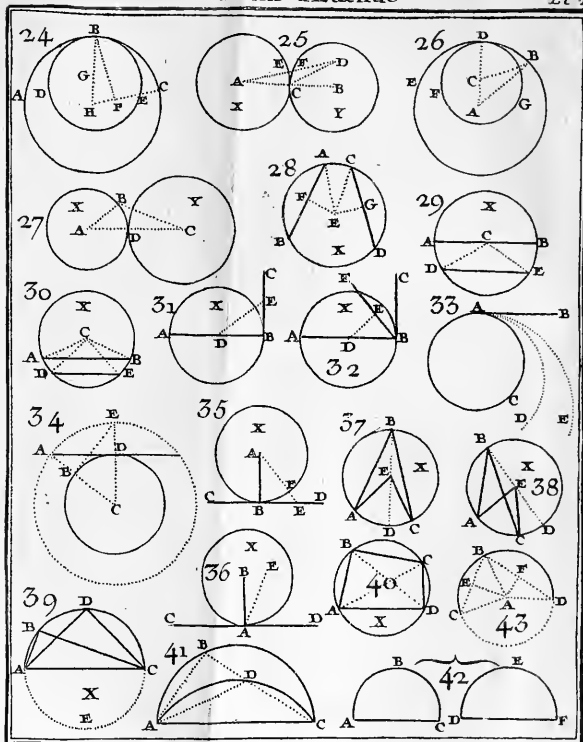
F I N.



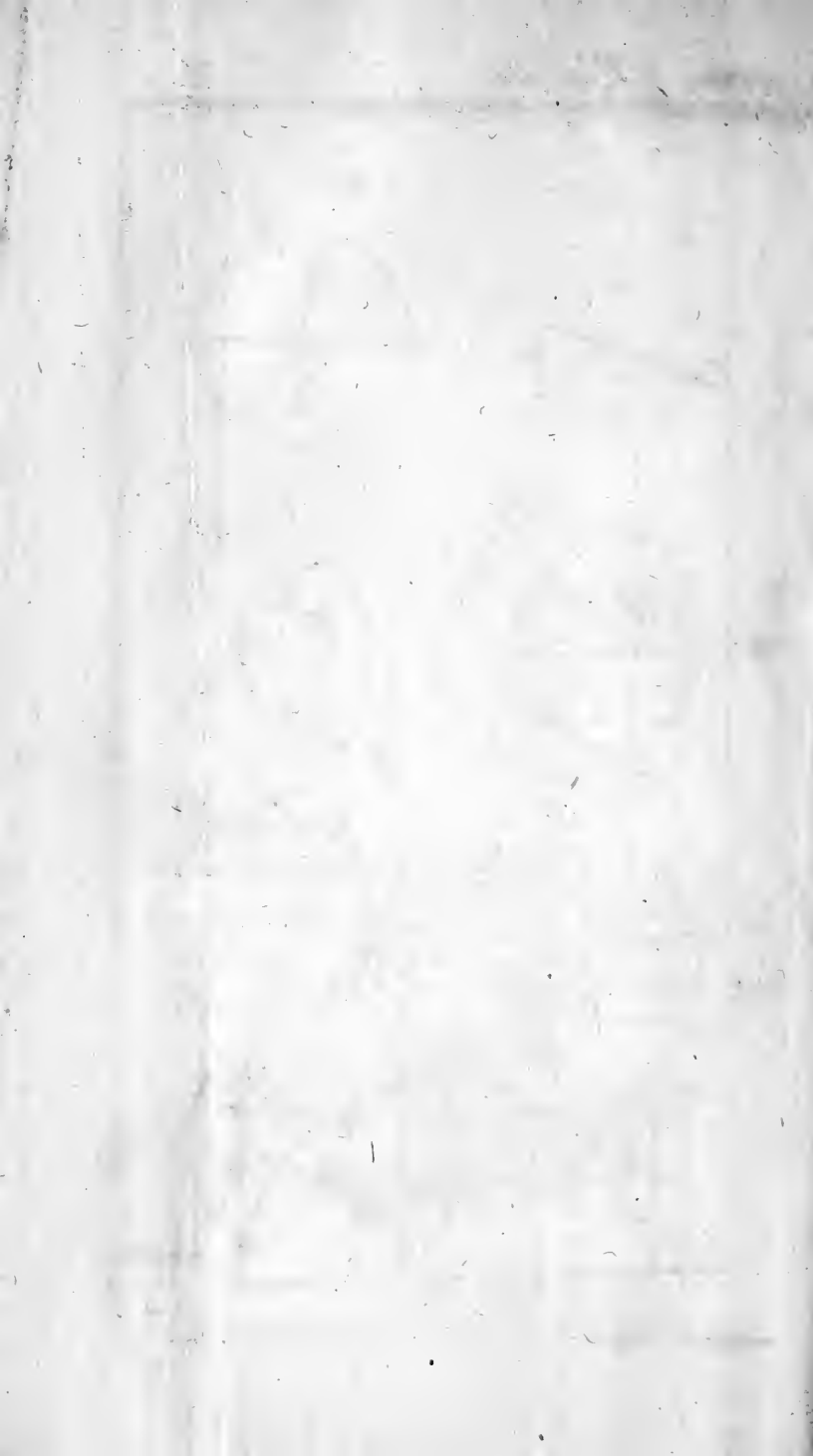


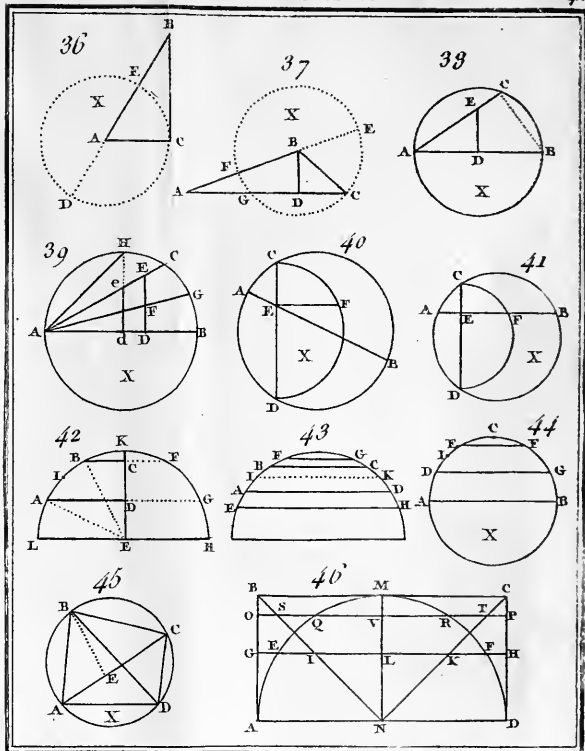


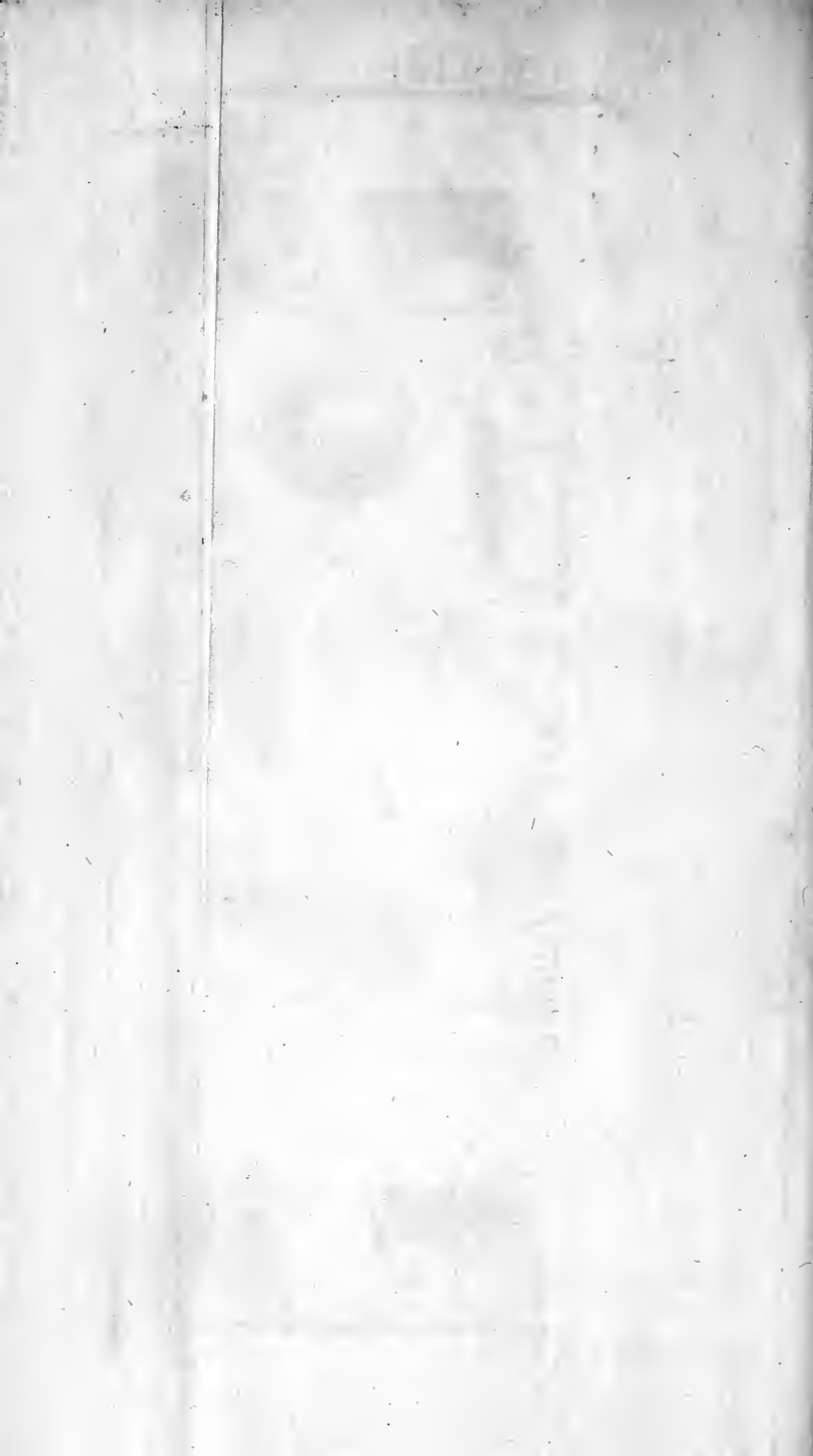


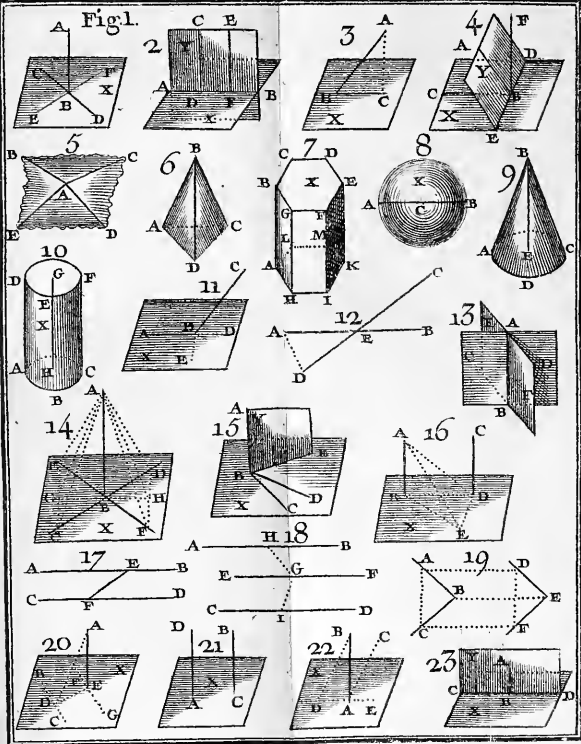


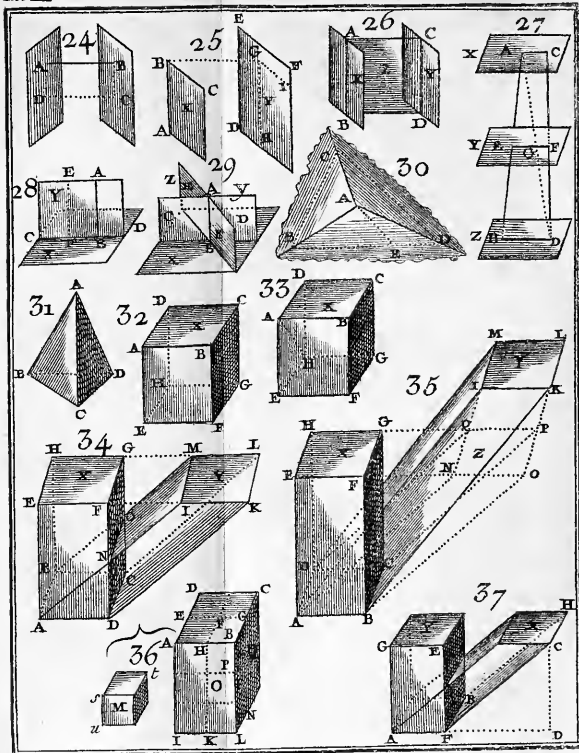




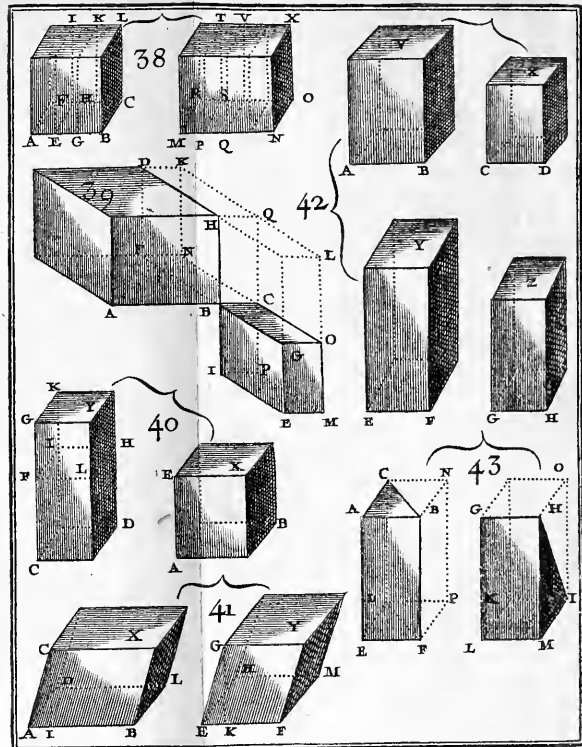




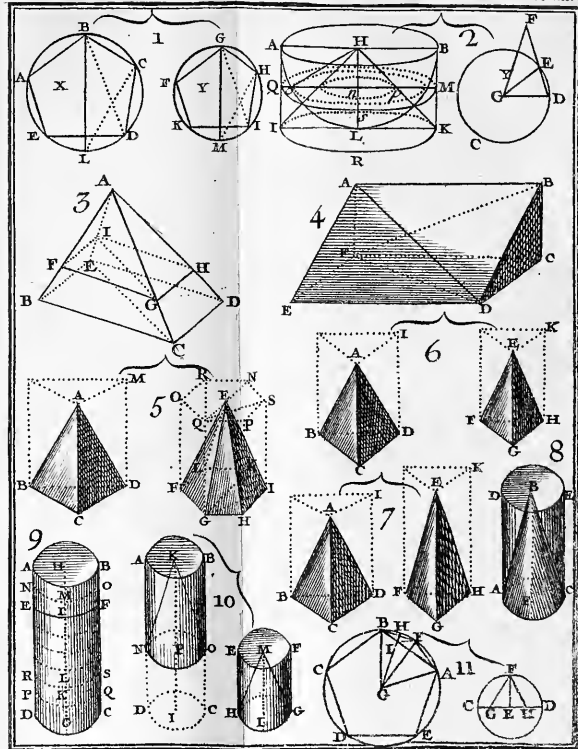












THE BIBLE

(2)

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

THE BIBLE

